TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: L'ALGEBRITZACIÓ DE LES MATEMÀTIQUES: PROCEDIMENTS ALGEBRAICS PER RESOLDRE PROBLEMES GEOMÈTRICS

Autor: Marta Armengol Mascarell

Director: Maria Rosa Massa Esteve

Codirector: Mònica Blanco Abellán

Departament: Matemàtiques

Convocatòria: 2018-05

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Previ a la presentació d'aquest treball vull agrair el suport que m'han donat les directores d'aquest treball, Sra. Mª Rosa Massa Esteve i Sra. Mònica Blanco Abellán, i tot l'esforç que hi han dedicat. I a tota la meva família, en especial als meus "Abuelitos" que tot i els esdeveniments han estat al sempre a meu costat.

I per acabar als meus professors, companys i amics, en especial a l'Adrià i la Nora, els vull agrair el seu suport i ajuda en la realització d'aquest treball.

INTRODUCCIÓ

Aquest treball forma part d'una recerca més àmplia sobre el procés d'introducció de procediments algebraics per resoldre problemes geomètrics i la seva difusió, que avui anomenem algebrització de les matemàtiques. Aquest procés s'esdevé des de la meitat del segle XVI fins al començament de segle XVII.

Els problemes geomètrics es resolien mitjançant la geometria d'Euclides fins que l'any 1591 François Viète (1540-1640) en la seva obra *In Artem Analyticen Isagoge* introduí la utilització de l'àlgebra com a mètode analític. En molts casos la demostració euclidiana era extensa i era necessari un grau alt de coneixement de geometria per entendre la resolució proposada, però aquesta també comportava restriccions. Per exemple, en resoldre una equació de segon grau, sovint s'obtenia una única solució real positiva, i la solució negativa no es tenia en compte ja que en geometria no tenia sentit tenir segments negatius.

És per això que el desenvolupament de l'àlgebra representa un gran canvi a les matemàtiques, ja que permetrà resoldre problemes que abans no tenien solució o que era inimaginable la seva resolució geomètrica. Permetia que la resolució de problemes fos més exacta i l'aparició de problemes més complexos.

Després que Robert de Chester (arabista del segle XII) fes la traducció de "*Hisab al-jabrwal-muqqabala"* (813) d' al-Khwarizmi (que va viure entre 780 i 850, aproximadament), les regles algebraiques de resolució d'equacions comencen a difondre's a Europa. Entre els segles XIII i XIV aquestes regles s'utilitzaran en el que ara anomenem com a matemàtiques mercantils. Aquestes s'ensenyaven en algunes de les escoles d'àbac de Florència i Venècia ja que podien ser utilitzades en els càlculs necessaris pel comerç. Aquestes matemàtiques es recopilaran en l'obra enciclopèdica de Luca Pacioli (1447-1517) titulada *Summa de Arithmetica, geometria, Proportioni & Proportionalità* (1494).[1]

Després de la introducció de l'anàlisi de Viète, la resolució algebraica consistia en suposar que coneixem una magnitud desconeguda, l'identifiquem amb una lletra i treballem amb aquesta en el problema donant per certa aquesta suposició. A la magnitud que era desconeguda se l'anomenava *cosa* o *res*. Tot seguit, utilitzant propietats geomètriques i els teoremes i proposicions euclidians resolien el problema com si totes les magnituds fossin conegudes.

Ja molt abans de Viète, Regiomontanus (1436-1476) en la seva obra *Triangulis Omnimodis* (1464, publicada el 1533) resol diversos problemes algebraicament, admetent que ell no va poder resoldre'ls de forma geomètrica. Degut a la introducció de l'art analític de Viète, aquesta nova regla s'anirà estudiant i introduint com a una nova eina fins a assolir la importància que té avui. Per aquest motiu es coneix a Viète com el pare de l'àlgebra moderna.

Els problemes, les resolucions dels quals que estudiarem, se centren majoritàriament en el període que va des del 1500 al 1750, aproximadament. Aquest període és conegut com el Renaixement o el "early modern period" segons H.J.M Bos (2001). Cal destacar que el

[1] Informació extreta de [Massa,2006] i dels apunts de l'assignatura d'Història de les Matemàtiques.

Renaixement és una època on es tornen a estudiar els descobriments, la cultura i la vida dels grecs. És per això que és barrejaran les regles algebraiques i els coneixements geomètrics per resoldre els problemes de caire matemàtic.

L' època marcarà els raonaments matemàtics, ja que no només es barrejaran els dos mètodes de resolució, sinó que es donarà per vàlida la solució d'una equació si se'n pot fer la construcció geomètrica. Tot i així, autors com Regiomontanus i posteriors utilitzaran les regles algebraiques com a mètode de resolució.

Tal i com diu Bos (2001), en les matemàtiques el que és prioritari i fonamental és la cerca de l'exactitud, i per tant serà habitual veure com diversos autors posteriors analitzen les noves solucions trobades i presentaran la seva pròpia.

L'objectiu d'aquest treball és estudiar el procés d'algebrització de la geometria a través de les diferents resolucions de dos problemes que començà a resoldre Regiomontanus a la seva obra de 1464. D'aquesta manera mitjançant les propostes de resolució, veurem com es fan unes de les primeres resolucions algebraiques de problemes de caire geomètric. També intentarem veure que tant les resolucions algebraiques com les geomètriques són demostracions alternatives.

La metodologia de recerca d'aquest treball ha consistit en l'estudi de les fonts originals i en l'anàlisi comparativa de la resolució dels problemes en els textos originals tenint en compte la cronologia, la rellevància i els procediments d'aquests. Algunes resolucions ja han estat treballades per autors com Bos, en el seu llibre *Redifining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early modern Concept of Contruction* (2001), però les resolucions que trobem en l'obra de Cyriacus no ha estat analitzada fins ara.

L'estructura del treball consisteix en una contextualització de l'època històrica- matemàtica pel que fa a les relacions entre àlgebra i geometria, i després un estudi de cada autor i obra on es resolen els problemes de forma cronològica. Mostrarem les resolucions que proposen Regiomontanus, Pedro Nuñez (1502-1578), Viète i l'anàlisi que Clemens Cyriacus (1570-1642) en fa d'aquestes resolucions. Per a situar el tema mostrarem primer la meva proposta de resolució tal i com es podria fer amb els coneixements actuals.

1. Àlgebra i Geometria del segle XV al XVII

Durant el Renaixement, en totes les disciplines tant artístiques com científiques, es fa un estudi dels clàssics grecs i romans. En concret en la matemàtica es torna a estudiar la geometria grega, però aquest estudi es veurà confrontat amb el fet que la matemàtica antiga no pot proporcionar resolucions per a tots els problemes. Molts autors es dedicaran a traduir les obres geomètriques clàssiques del llatí o el grec al francès, l'anglès o el castellà, entre altres.

Autors com Luca Pacioli (1445-1514) i Girolamo Cardano (1501-1576), entre altres, començaran a utilitzar les regles algebraiques i estudiaran la resolució d'equacions i la seva classificació. Un fet crucial en el desenvolupament històric de l'àlgebra va ser la publicació de l'obra de *In Artem Analyticen Isagoge* (1591) de Viète, que permetrà que molts matemàtics considerin les utilitats de l'àlgebra.

Després de l'obra de Viète i gràcies a aquesta, molts autors com Pierre de Fermat (1601-1665) o René Descartes (1596-1650) comencen a considerar l'àlgebra com una eina molt útil per a la resolució de problemes geomètrics , és a dir, per tot tipus de problemes (Nullum non problema solvere, que deia Viète[2]). Més concretament, Descartes serà la figura més influent en l'estudi de la relació entre l'àlgebra i la geometria. La seva obra *La Géométrie (1637)* serà un punt de partida per arribar a la manera en que usem i pensem l'àlgebra en l'actualitat.

Amb la nova disciplina, l'àlgebra, apareix una nova necessitat de definir les diferències entre l'aritmètica, l'àlgebra i la geometria. Autors com John Wallis (1616-1703) tenien un pensament més algebraic, de manera que fan una aritmètica cada cop més algebraica. En canvi, autors com Isaac Barrow (1630-1677) seguiran pensant que l'aritmètica té fonaments geomètrics i que no es poden entendre les quantitats sense estudiar-les en un entorn geomètric.

El pensament algebraic es caracteritza per la utilització del simbolisme per operar i per una llibertat del compromís ontològic.[3] És a dir, que el pensament algebraic es caracteritza per utilitzar símbols i que a l'hora d'operar no cal que tinguem en compte si els objectes són plans o rectes. I aquests trets es començaran a donar a l'obra de Descartes.

Però alguna característica d'aquest pensament es donarà abans de Descartes. En molts problemes s'introduirà l'àlgebra amb simbolisme però utilitzant mètodes geomètrics per resoldre aquests problemes, fent que es comencés a pensar algebraicament sense oblidar la geometria. Però poc a poc, s'anirà deixant de banda el pensament geomètric per passar al pensament algebraic.

Aquest procés és el que s'anomena l'algebrització de les matemàtiques, ja que es passa d'una mentalitat més geomètrica a un pensament matemàtic més algebraic. Aquest procés va ser lent ja que molts matemàtics de l'època el refusaven, sobretot degut a que la nova eina a vegades s'oposava al pensament de la matemàtica clàssica. Però poc a poc i gràcies a l'aparició d'obres que unien l'àlgebra amb la geometria, l'àlgebra començarà a ser utilitzada per a la demostració de problemes geomètrics.[4]

---

[2] Dins els apunts de la assignatura trobem el fragment següents: "Finalment, l'art analític, dotat de les seves tres formes zetètica, porística i exegètica, reclama per a ell mateix la solució del problema més gran de tots que és SOLUCIONAR TOTS ELS PROBLEMES (Viète, 1970 : 12)".
[3] Per ampliar en el procés d'algebrització i en aquesta definició mirar [Mancosu, 1996]
[4]Més informació a [Massa 2006]

Segons Mancosu (1996), aquest procés permet que en les matemàtiques es defineixin les disciplines i fa avançar l'estudi dels nombres negatius i les operacions que es poden fer amb aquests, de l’infinit i dels nombres imaginaris, entre d’altres.

La resolució algebraica dels problemes geomètrics que estudiem és un clar precedent de la nova ciència, l’àlgebra, que estava a punt d’incorporar-se a les matemàtiques com una part amb estatus similar a l’aritmètica i a la geometria.

2. Presentació dels problemes

Els problemes que estudiarem, que es proposen al segon llibre de l'obra de Regiomontanus, *Triangulis Omnimodis* (1464) són el que podria traduir com les següents proposicions:

> *Proposició XII: Si l'alçada, la base i la proporció entre els costats [d'un triangle] son coneguts, podem conèixer tots els costats del triangle.*[5]

> *Proposició XXIII : Si en un triangle coneixem la diferència entre dos costats, la diferència entre dos segments en que la perpendicular divideix (el tercer costat) i la perpendicular mateixa, podem trobar tots els costats.*[6]

A l'inici de la resolució d'aquests problemes, Regiomontanus afirma que no poden ser resolts per mitjans geomètrics. Aquesta afirmació va portar a que molts autors estudiessin aquest problema, com Nuñez i Adriaan van Roomen (1561-1615).

Adriaan van Roomen[7] , tal i com s'explica al Primer capítol de l'obra de Clemens Cyriacus, va ser qui va enviar una carta a Viète preguntant per aquest problema.[8]

Adriaan Van Roomen, conegut pel seu nom llatí Adrianus Romanus, va ser un matemàtic belga, qui en el seu llibre *Ideae mathematicae (1593)* proposa un problema sobre la resolució d'una equació de grau 45. Viète va ser el primer en resoldre aquest problema, i des de llavors Van Roomen proposava problemes a Viète. Un d'ells van ser els proposició XII de Regiomontanus, del qual Viète n'escriurà la seva resolució geomètrica.

---

[5][Regiomontanus 1464] pàg.51 prop XII: "Data perpendiculari at que basi, &proportione laterum cognitis, utruncque latus cognoscere".
[6] [Regiomontanus 1464] pàg.55-56prop XXIII: "Data differentia duorum laterum, diferentia que duorum casu ucu ipsa perpendiculari cognita omnia propalare".
[7] Es pot trobar informació sobre la seva vida a " http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Roomen.html".
[8] [Cyriacus 1616] pàg 1-2: En la introducció és troba més informació.

2.1 La meva solució

A fi d'analitzar els problemes, intentaré mostrar la meva pròpia resolució dels problemes proposats. En els dos casos els resoldrem de manera general i mitjançant l'àlgebra.

2.1.1 Primer problema

El primer problema que tractarem es troba a la proposició XII de l'obra de Regiomontanus.

> *Proposició XII: Si l'alçada, la base i la proporció entre els costats son coneguts, podem conèixer tots els costats del triangle.*

Per simplificar la resolució suposarem que el triangle que busquem és el triangle ABC, un triangle similar al que veiem en la Figura 1.

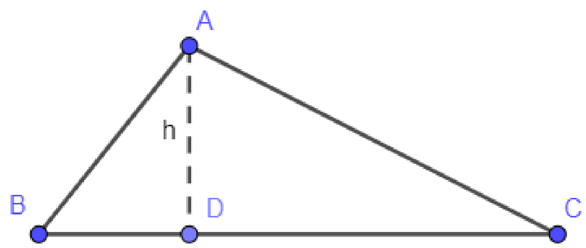


FIGURA 1 Representació del problema feta amb Geogebra

Per resoldre aquest problema posarem valors a les magnituds conegudes. Definirem:

$\frac{AC}{AB} = \frac{d}{e}$ $BC = c$ i $AD = h$

Donats aquests valors, volem trobar la mesura dels dos costats restants AB i AC.

Anomenem x al segment DB i sabem que pel teorema de Pitàgores:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow AB^2 = h^2 + x^2 \qquad (1)$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow AC^2 = h^2 + (x-c)^2 \Rightarrow AC^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2 \qquad (2)$$

Amb (1) , (2) i la proporció donada per l'enunciat, sabem que:

$$\frac{d^2}{e^2} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{h^2 + c^2 - 2cx + x^2}{h^2 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow d^2h^2 + d^2x^2 = e^2h^2 + e^2c^2 - 2ce^2x + e^2x^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = e^2h^2 + e^2c^2 - d^2h^2 - 2ce^2x + (e^2 - d^2)x^2 \qquad (3)$$

Resolent la equació (3) trobem dues solucions i si substituïm aquesta a (1) i (2), podem trobar el costats del triangle que buscàvem.

Per tant, acabem de veure que donats la base i la altura, podem trobar un triangle que tingui aquesta base i altura i que els costats restants tinguin una proporció donada.

2.1.2 Segon problema

Un cop resolt el primer problema , resoldrem la proposició XXIII de Regiomontanus.

> *Proposició XXIII: Si en un triangle coneixem la diferència entre dos costats, la diferència entre dos segments en que la perpendicular divideix (el tercer costat) i la perpendicular mateixa, podem trobar tots els costats.*

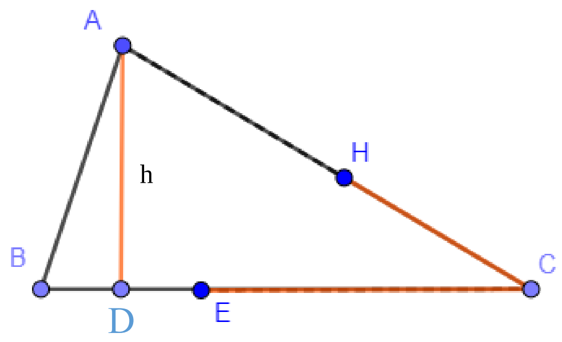


FIGURA 2 Representació del triangle del problema XVII feta amb Geogebra

Aquest problema el que ens ve a dir, segons la Figura 2, és que si en un triangle coneixem *HC* (la diferència entre els costats *AC i AB*), *EC* (la diferència entre els segments *BD i CD*) i la perpendicular *AD*, podem trobar tots els costats del triangle ABC.

Per a resoldre aquest problema assignarem lletres a les magnituds conegudes, per exemple:

$$CH = AC - AB = b$$

$$EC = DC - BD = a$$

$$AD = h$$

Per resoldre'l , anomenarem a BD = x i a partir d'aquesta igualtat obtenim altres resultats:

$$BC = BD + DE + EC = 2x + a \qquad (4)$$

Per trobar els altres dos costats, aplicarem el teorema de Pitàgores als triangles ABD i ADC.

$$AC^2 = h^2 + DC^2 = h^2 + (x + a)^2 = h^2 + a^2 + 2ax + x^2 \qquad (5)$$

$$AB^2 = h^2 + DB^2 = h^2 + x^2 \qquad (6)$$

També sabem per l'enunciat que AC – AB = b i si ho substituïm en (6):

$$h^2 + x^2 = AB^2 = (AC - b)^2 = AC^2 - 2b * AC + b^2 \qquad (7)$$

D'aquesta última igualtat (7) en deduïm que :

$$x = \sqrt{AC^2 - 2b * AC - h^2 + b^2} \qquad (8)$$

I si ho substituïm en (5) podrem obtenir el valor de AC

$$AC^2 = h^2 + a^2 + 2ax + x^2$$
$$= h^2 + a^2 + 2a\sqrt{AC^2 - 2b * AC - h^2 + b^2} + AC^2 - 2bAC - h^2 + b^2$$

$$= a^2 + 2a\sqrt{AC^2 - 2b * AC - h^2 + b^2} + AC^2 - 2bAC + b^2$$

Desenvolupant aquesta igualtat i resolent l' equació de segon grau obtenim el valor de AC .

De les dues solucions obtingudes prenem la positiva ja que no tindria sentit que un costat tingués mesura negativa. Per tant amb (4) i sabent *AC – AB = b* obtenim els tres costats del triangle.

Per tant, acabem de veure que donades les diferències entre costats i l'alçada, podem trobar el triangle.

3. Regiomontanus (Königsberg, 1436- Roma, 1476)

3.1. Dades biogràfiques

Per trobar una de les primeres resolucions del problema que estem estudiant, tal i com diu Bos[9], hem de mirar el treball de Regiomontanus. En concret els trobem al segon llibre de la seva obra *De triangulis Omnimodis* (1464).

Johann Müller de Königsberg[10], que adoptà la forma llatina del nom de la seva ciutat (Regiomontanus), va estudiar a les universitats de Leipzig i Viena on demostrà un gran interès per les matemàtiques i l'astronomia. Cal destacar que va ser deixeble de Georg Pauerbach (1423-1469) durant la seva època a Viena.

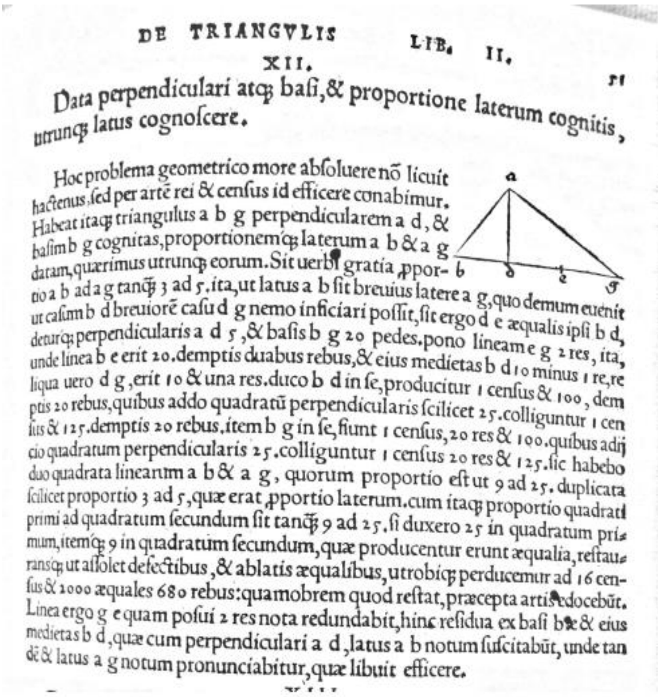
Regiomontanus va promoure molt el coneixement i l'interès per la ciència i la literatura. Va morir a Roma l'any 1476, on havia anat a formar part del projecte de reforma del calendari.

L'obra de Regiomontanus, considerada una de les més important de la història de la trigonometria, està basada en tractats i escrits que tenen una finalitat astronòmica, però sent ell conscient de que el tractat anava més enllà. En concret en *De triangulis omnimodis,* que no és publicada fins l'any 1533, fa un tractat sobre propietats de triangles i és aquí on trobarem els problemes que volem analitzar. Els problemes corresponen a la proposició XII i XXIII del llibre II, i per la seva resolució Regiomontanus utilitza l'àlgebra.

---

[9] [Bos, 2001] pàg. 88-90

[10] Per trobar més iformació de la biografia es poden consultar https://www.britannica.com/biography/Regiomontanus i https://es.wikipedia.org/wiki/Johann_M%C3%BCller_Regiomontano



DE TRIANGVLIS LIB. II.
XII.
51

Data perpendiculari atque basi, & proportione laterum cognitis, utrunque latus cognoscere.

Hoc problema geometrico more absoluere nõ licuit hactenus, sed per artẽ rei & census id efficere conabimur. Habeat itaque triangulus a b g perpendicularem a d, & basim b g cognitas, proportionemque laterum a b & a g datam, quærimus utrunque eorum. Sit uerbi gratia ꝓportio a b ad a g tanquam 3 ad 5, ita, ut latus a b sit breuius latere a g, quo demum euenit ut casum b d breuiorẽ casu d g nemo inficiari possit, sit ergo d e æqualis ipsi b d, detur que perpendicularis a d 5, & basis b g 20 pedes. pono lineam e g 2 res, ita, unde linea b e erit 20. demptis duabus rebus, & eius medietas b d 10 minus 1 re, reliqua uero d g, erit 10 & una res. duco b d in se, producitur 1 census & 100, demptis 20 rebus, quibus addo quadratũ perpendicularis scilicet 25. colliguntur 1 census & 125. demptis 20 rebus, item b g in se, fiunt 1 census, 20 res & 100. quibus adijcio quadratum perpendicularis 25. colliguntur 1 census 20 res & 125. sic habebo duo quadrata linearum a b & a g, quorum proportio est ut 9 ad 25. duplicata scilicet proportio 3 ad 5, quæ erat ꝓportio laterum. cum itaque proportio quadrati primi ad quadratum secundum sit tanquam 9 ad 25. si duxero 25 in quadratum primum, itemque 9 in quadratum secundum, quæ producentur erunt æqualia, restaurans que ut assolet defectibus, & ablatis æqualibus, utrobique perducemur ad 16 census & 2000 æquales 680 rebus: quamobrem quod restat, præcepta artis edocebũt. Linea ergo g e quam posui 2 res nota redundabit, hinc residua ex basi b e & eius medietas b d, quæ cum perpendiculari a d, latus a b notum suscitabũt, unde tandẽ & latus a g notum pronunciabitur, quæ libuit efficere.

FIGURA 3 Problema XII llibre 2 de *Triangulis omnimodis* de Regiomontanus (1464), edició de l'any 1533

Tal i com es pot veure la Figura 3, Regiomontanus resol els problemes de manera retòrica i sense utilitzar símbols. A la magnitud que no coneixem l'anomenarà *rei* (cosa) i al seu quadrat, *census*. Cal remarcar que utilitza els procediments algebraics com si fossin habituals i dona per conegudes les regles per resoldre equacions de segon grau i deixa al lector els càlculs.

3.2 Resolució del primer problema a Regiomontanus

Analitzem ara la resolució de Regiomontanus per al primer problema.

Proposició XII: Si l'alçada, la base i la proporció entre els costats son coneguts, podem conèixer tots els costats del triangle.

Un cop enunciat el problema, Regiomontanus indica que el problema el resoldrà per l'art de la *cosa,* ja que no el pot resoldre per geometria (vegeu fig. 3):

"Aquest problema no pot ser demostrat per mitjans geomètrics en aquest punt, però ens esforçàrem per aconseguir-ho mitjançant l' art de la cosa i el *census.*" [11]

Per tant, l'autor utilitza l'àlgebra per a demostrar problemes, fet que ens indica que per a ell és un art tan vàlid com la geometria per la resolució de problemes[12].

[11] [Regiomontanus 1464] pàg.51: " Hoc problema geometrico more absolvere non licuit hacte nus sed per artem rei et census id efficere conabimur".
[12] Més informació sobre la biografia i la resolució del problema [Guevara i Massa, 2005]

Abans dels inicis de l'àlgebra, la geometria és considerada l'única manera de demostrar lemes i teoremes. Per tant, que es demostri un problema utilitzant únicament regles algebraiques denota que aquesta nova manera de fer comença a tenir molta importància.

Per l'anàlisi de la resolució del problema, mostrarem una interpretació de la resolució de Regiomontanus amb la simbologia actual, utilitzant tant els números com les lletres proposades per l'autor. L'única diferència es que a la incògnita l'anomenarem *x,* enlloc de rei.

En la figura 5 podem veure el triangle que volem trobar i que ens ajudarà a entendre la notació que utilitza.

Per a demostrar el problema, Regiomontanus el que fa es donar valors a les magnituds conegudes:

$$\begin{cases} AD = 5 \\ BG = 20 \\ \dfrac{AB}{AG} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

On *AD* és la l'alçada, *BG* és la base i *AB i AG* són els costats del triangle, tal i com és pot veure a la imatge.

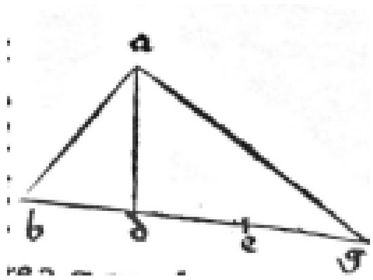


FIGURA 4 Representació del triangle proposada per Regiomontanus (1464)

Un cop donades les magnituds, comença la resolució del problema.

El primer pas és definir un punt *E* tal que *DE = DB*. D'aquesta manera, pot definir *EG=2x.*
Aquesta definició de la *x* no és gaire usual ni evident. El més segur és que ho definís així ja que l'elecció simplifica els càlculs posteriors,

$$EB = GB - EG = 20 - 2x$$

I com que *EB = ED + BD = 2*BD* aleshores:

$$BD = \frac{20 - 2x}{2} = 10 - x \ \rightarrow \quad DG = 20 - (10 - x) = 10 + x$$

Per tant definint *EG* com a *2x*, facilita l'expressió ja que si definíssim *EG = x*, ens quedaria que $BD = 10 - \frac{x}{2} \ \ i \ \ DG = 10 + \frac{x}{2}$, fent que l'expressió final fos més complicada.

El següent pas que fa és aplicar el que ara coneixem com a teorema de Pitàgores en els triangles *ADG i ADB*, tot i que no fa cap referència aquest teorema. És a dir, utilitza que la suma dels quadrats dels costats són el quadrat de la hipotenusa.

$$\left.\begin{array}{c} BD^2 = (10-x)^2 = 100 - 20x + x^2 \Rightarrow AB^2 = BD^2 + DA^2 = x^2 - 20x + 125 \\ DA^2 = 5^2 = 25 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} DG^2 = (10+x)^2 = 100 + 20x + x^2 \Rightarrow AG^2 = GD^2 + DA^2 = x^2 + 20x + 125 \\ DA^2 = 5^2 = 25 \end{array}\right\}$$

Un cop coneguts els valors dels quadrats de *AB i AG*, aplica el quadrat de la proporció donada al principi[13]. És a dir,

$$\frac{AB}{AG} = \frac{3}{5} \ \rightarrow \ \frac{AB^2}{AG^2} = \frac{9}{25}$$

És en aquest punt, on afirma que podem multiplicar el primer terme per el quart i és igual que el segon pel tercer.[14] És a dir, $AB^2 * 25$ és igual a $AG^2 * 9$.

Aquest pas ens indica que l'àlgebra era un art en el qual Regiomontanus tenia agilitat i coneixement, ja que afirma que la proporció entre dues equacions existeix i per tant considera, potser sense intenció, que l'equació és un objecte matemàtic amb el qual es pot operar.

Un cop té la igualtat, restant els termes de la equació obtenim $16x^2 + 2000 = 680x$. Llavors seguint les regles de l'àlgebra afirma que podem conèixer *x* i *GE=2x*. I un cop coneguda la *x* i les equacions anteriors podem conèixer tots els costats dels triangles.

3.3 Resolució del segon problema a Regiomontanus

El segon problema que volem analitzar és la proposició XXIII del segon llibre de *De triangulis omnimodis*. L'enunciat del proposició XXIII de Regiomontanus, es tradueix com:

Proposició XXIII: Donada la diferència entre els costats, la diferència entre les parts en que queda dividida la base i la perpendicular, coneixerem tots els costats del triangle.

[13] [Regiomontanus 1464] pàg.51: "sic habebo dua quadrata linearum ab&ag, quorum propotio est ut 9 ad 25."
[14] [Regiomontanus 1464] pàg.51: "si duxero 25 in quadratum primum, item 9 in quadratum secundum, quaeproceduntur erunt aequalia."

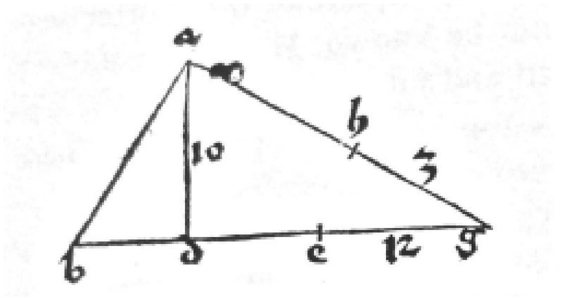


FIGURA 5 Representació del problema 23 en el llibre de Regiomontanus, De triangulis Omnimodis (1464)

En aquest problema Regiomontanus també diu que el resoldrà per àlgebra, però no diu que no es pugui resoldre per geometria, simplement diu que ho resoldrà així.[15]

Com en l'altre problema, defineix primer les magnituds conegudes, tal i com podem veure a la Figura 5.

$$\begin{cases} HG = 3 \\ EG = 12 \\ AD = 10 \end{cases}$$

Com a x defineix *GB = x* i assegura que *AG + AB = 4x* ja que $\frac{GB}{AB+AG} = \frac{DG+BD}{AB+AG} = \frac{HG}{GE} = \frac{1}{4}$.

Aquesta afirmació necessita que la demostrem ja que no és una igualtat evident. Volem demostrar que :

$$\frac{GB}{AB+AG} = \frac{DG+BD}{AG+AB} =^{?} \frac{AG-AB}{DG-BD} = \frac{3}{12}$$

Volem demostrar la igualtat del mig. Sabem que aquesta igualtat serà certa si ho és aquesta igualtat. Primer fem el producte creuat:

$$\frac{DG+BD}{AG+AB} =^{?} \frac{AG-AB}{DG-BD} \Leftrightarrow DG^2 - BD^2 =^{?} AG^2 - AB^2$$

Operant amb la darrera igualtat obtenim:

$$DG^2 - BD^2 =^{?} AG^2 - AB^2 \Leftrightarrow AB^2 - BD^2 =^{?} AG^2 - DG^2 \Leftrightarrow AD^2 =? AD^2$$

Aquesta última igualtat sabem que és certa i per tant, podem dir que la primera també ho és.

I com *GB = x*, llavors podem dir que *AG +AB = 4x*. D'aquí se'n dedueix dues igualtats :

- $BD = \frac{1}{2}x - 6 \Rightarrow$ Aquesta igualtat es demostra :

$$EG = DG - BD = DG + BD - 2BD = GB - 2BD = x - 2BD$$

[15] [Regiomontanus 1533] pàg.56: "Per artem rei & census hoc problema absolemus"

$$BD = \frac{1}{2}(x - EG) = \frac{1}{2}(x - 12) = \frac{1}{2}x - 6$$

- $AB = 2x - \frac{3}{2} \Rightarrow$ Demostrem aquesta igualtat:

$$AB + AG = 4x \Rightarrow 2AB - AB + AG = 4x \Rightarrow 2AB + HG = 4x$$
$$AB = \frac{1}{2}(4x - HG) = \frac{1}{2}(4x - 3) = 2x - \frac{3}{2}$$

Llavors amb els valors de *AB i BD*, aplica el teorema de Pitàgores al triangle *ABD*.

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \Rightarrow \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - 6\right)^2 + 100$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 36 + 100$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 136$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 9 = x^2 + 544$$

$$\Rightarrow 15x^2 = 535$$

Regiomontanus explica com arribar a l' equació $4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 136$ i assegura que movent termes i restant-los, podem arribar a una igualtat on tantes x^2 son iguals a un nombre[16]. I per això podem conèixer el valor de *x*.

Un cop descobert aquest, l'únic que ens manca és substituir *x* en la expressió que hem trobat per *AB* i sabent que *AG-AB =3*, trobem *AG*.

3.4 Conclusió

Tal i com podem veure en la demostració, Regiomontanus utilitza les regles algebraiques però barrejades amb forts coneixements geomètrics que li permeten resoldre el problema. A més, si estudiem els altres problemes del llibre, veiem que la gran majoria estan resolts únicament amb propietats geomètriques.

D'aquí en podem deduir que amb aquests problemes mostren com l'art de la cosa agafa força però encara no és un mètode que utilitzaran molt sovint, ja que es continua creient que la millor manera de demostrar propietats és mitjançant els mètodes i les propietats de la geometria euclidiana. Per aquest motiu a l'inici d'aquests problemes, Regiomontanus recalca que canvia el mètode de resolució i afirma que no els pot resoldre per geometria. Per tant, ens indica que la demostració amb regles algebraiques no és la primera opció dels autors.

[16] [Regiomontanus 1533] pàg.56: "Restaurando istac defectus & auserendo utrobic aequalia, quemadmodum ars ipsa praecipit, habebimus census aliquot aequalis numero"

En canvi, les regles algebraiques de resolució d’equacions eren conegudes ja que l’autor no resol l‘equació final. Per tant, l’autor dona per suposat que el lector coneix els mètodes de resolució d’equacions. Fet que ens indica que l'àlgebra es una regla estesa i utilitzada en la època.
Però un altre fet que ens indica que les regles algebraiques no estan prou assentades és que autors posteriors a Regiomontanus intentaran demostrar que els problemes proposats es poden resoldre geomètricament, un exemple d’ells serà Viète la resolució del qual mostrarem més endavant.

4. Pedro Nuñez (Alcàcer do Sal, 1502 – Coimbra,1578)

4.1 Dades Biogràfiques[17]

Si busquem altres resolucions dels problemes, un dels següents que els resol, és Pedro Nuñez.

Nuñez va ser un metge, astrònom, geògraf i matemàtic portuguès que va estudiar a Salamanca entre 1517 i 1527. Després torna a Portugal, a Lisboa on va ser designat cosmògraf real i va ser tutor del Princep Luís. En aquesta època està amb contacte Martim Afono de Sousa i Joao de Castro, dos del navegants que van estar en la expedició de Portugal i amb qui compartirà coneixements de navegació. L'any 1537 torna a Coimbra i esdevé catedràtic de matemàtiques.

Va fer importants contribucions en matemàtiques, astronomia i navegació, a través de diverses obres, entre les quals destaca el *Libro de Álgebra en Arithmétrica y Geometria* (1567). Aquesta obra de Nuñez, és similar a l'obra de Regiomontanus ja que l'obra és una recopilació de problemes. La finalitat del llibre de Pedro Nuñez és mostrar la utilitat i la grandesa de l'àlgebra. En aquesta obra, l'àlgebra és un art necessari a Lisboa, degut a que hi ha molts homes de negocis. Per tant, en la seva obra té com a finalitat ensenyar l'art de l'àlgebra.

En aquesta obra s'utilitza l'àlgebra per a la resolució de problemes geomètrics. La demostració es fa amb un llenguatge retòric, tal i com es pot veure en la Figura 6.

[17] Més informació sobre l'obra i la vida de Nuñez a [Massa ,2010].

DESTA OBRA. 271

ſu quadrado y la vnidad. Queriendo pues co-
noſcer los lados y las partes en las quales eſta
diuiſa la baſe, pornemos d c parte menor ſer 1
co. y ſera luego b d.20.m̃.1.co. El quadrado de
d c. ſera 1 ce.que con 25.quadrado de a d.haran
juntos 1 ce.p̃.25.y eſto ſera ygual al quadrado de
a c.Y porque b d,es 20.m̃.1.co.ſera el ſu quadra-
do 400.p̃.1.ce.m̃.40.co. el qual con 25.quadrado
de a d. haran juntos 425 p̃.1.ce.m̃.40.co. y eſto
ſera ygual al quadrado de a b.Y porque la pro-
porcion de a b,para a c. es como de R.5.para 1.
ſera luego la proporciõ delos quadrados como
de 5.para 1,o como de 25,para 5.Aſſi que de 425
p̃.1.ce.m̃.40.co.quadrado de a b. para 1.ce.p̃.25.
quadrado de a c. ſera como de 5 para 1. Y por
que ſiendo quatro quantidades proporciona-
les,tanto ſe haze multiplicando la primera por
la quarta,como la ſegunda por la tercera,tanto
ſe hara luego multiplicando la primera,que es
425.p̃.1.ce.m̃.40.co. por la vnidad q̃ es la quar-
ta,como multiplicando la ſegunda que es 1.ce.
p̃.25. por 5.que es la tercera . La primera por la
quarta,hazen los miſmos 425.p̃.1.ce.m̃.40.co. y
la ſegunda por la tercera, hazen 5.ce.p̃.125. que
ſeran yguales. Ygualando pues 425.p̃ 1.ce.m̃.40.
co.con 5.ce.p̃.125,quedarã a la fin 4.ce.p̃.40.co.
yguales a 300. y partiendo todo por el numero
delos cenſos,el qual es 4. ternemos finalmente
1 ce.p̃.10.co.yguales a 75.que es la primera delas
cõpueſtas,y la obra ſera eſta conforme a la Re-
gla. El numero delas coſas es 10,la mitad es 5.q̃
multiplicada por ſi,haze 25.los quales juntando
con 75.q̃ es el numero,haremos 100.y dela raiz
l v de

FIGURA 6 Fragment del problema 1 en el llibre de Pedro Nuñez

A diferència de l'autor anterior, ell inclou simbologia, sense arribar a ser semblant a l'actual però veiem que l'àlgebra comença una evolució cap l'ús dels símbols. El que utilitza és :

Co = x , Ce = x^2*, ~p= +, ~m = -*

DESTA OBRA. 271

ſu quadrado y la vnidad. Queriendo pues co-
noſcer los lados y las partes en las quales eſta
diuiſa la baſe, pornemos d c parte menor ſer 1
co. y ſera luego b d.20.m̃.1.co. El quadrado de

FIGURA 7. Fragment del problema 1 en el llibre de Pedro Nuñez (1567)

Tal i com es veu a la tercera línia del fragment de la Figura 7, hi ha expressions algebraiques com bd.20.~m 1 co, que actualment és podria traduir com $20bd - x^2$.

I utilitzant aquests símbols, resol els diferents problemes, entre ells el problema que estem estudiant.

4.2 Resolució del primer problema a Nuñez

El problema que estem estudiant el trobem a la pàgina 270, l'anomena el problema 46 que diu:

"Si la perpendicular fos coneguda, la base també i la proporció que tenen els dos costats del triangle entre ells fos sabuda, seran els costats coneguts i les parts de la base dividides per la perpendicular".[18]

Pedro Nuñez, a diferència de Regiomontanus, no fa un esquema o dibuix del problema que vol estudiar. Per visualitzar el triangle que busquem, he fet aquest dibuix usant les mateixes lletres que l'autor.

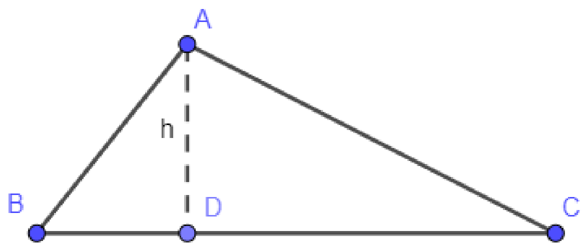


FIGURA 8 Representació del triangle del problema fet amb GeoGebra

Per a veure la resolució que proposa Nuñez, mostrarem a continuació, una interpretació del text original escrita en llenguatge actual. És a dir, en lloc de *cosa* posarem la incògnita *x*.

El primer que fa, és donar valors a les magnituds conegudes:

$$\mathrm{bc} = 20$$
$$\mathrm{ad} = 5$$
$$\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{ac}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

Pedro Nuñez afirma que la proporció és la mateixa que la que mantenen l'arrel de cinc a un.
I amb aquests valors, resol el problema proposat. Ell proposa com a incògnita el segment dc, i per tant sabem que dc = x i $\mathrm{dc}^2 = \mathrm{x}^2$. Sabent aquesta igualtat defineix *bd = 20 – x*, ja que *bd = bc - dc*.

Després, aplica que la suma dels quadrats dels costats és igual al quadrat de la hipotenusa als triangles ABD i ADC, és a dir el que ara coneixem per el teorema de Pitàgores tot i que ell no en fa referència.

- $ac^2 = ad^2 + bd^2 = 25 + x^2$
- $ab^2 = ad^2 + bd^2 = 25 + (20 - x)^2 = x^2 + 425 - 40x$

Llavors, aplica que si $\frac{ab}{ac} = \frac{\sqrt{5}}{1}$, elevant al quadrat obté que $\frac{ab^2}{ac^2} = \frac{5}{1}$. I amb els càlculs del quadrat dels costat i la proporció anterior arriba a:

$$\frac{x^2 + 425 - 40x}{25 + x^2} = \frac{5}{1}$$

[18] [Pedro Nuñez, 1567] pàg.270: "Si la base fuere conocida, y la base también conocida, y la proporción que entre si tienen los dos lados dese triangulo fuere sabida, será los dos lados conocidos, y las partes de la base donde cae la perpendicular."

Després d'aquesta igualtat Nuñez explica que si tenim $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, podem dir que *ad = cb*.[19]

I ell ho aplica al nostre cas, fent que obtingui la igualtat següent:

$$425 + x^2 - 40x = 5x^2 + 125$$

Llavors, agrupant termes, obté l'equació següent, que la pot resoldre per la regla de l'àlgebra:

$$4x^2 + 40x = 300 \Rightarrow x^2 + 10x = 75 \Rightarrow x = 5$$

Un cop trobada la solució comprova calcula el valor de la resta de costats i

- $ac^2 = 25 + x^2 = 50 \Rightarrow ac = \sqrt{50}$
- $ab^2 = x^2 + 425 - 40x = 250 \Rightarrow ab = \sqrt{250}$

I aquestes dues mantenen la proporció del enunciat. Pedro Nuñez ens diu que per la Regla de 3 [20]es pot demostrar:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{ac}{ab} = \frac{\sqrt{50}}{x} \Rightarrow x = \sqrt{50} * \sqrt{5} = \sqrt{250}$$

Amb això dona el problema per resolt. Al final d'aquest, diu que la seva resolució és una alternativa a la resolució de Regiomontanus, tenint en compte que ell ha agafat mesures diferents per a les magnituds conegudes. Nuñez deixa clar al lector que va estudiar la obra de Regiomontanus i així dona més veracitat a la seva resolució.[21]

4.3 Resolució del segon problema a Núñez

En la mateixa obra de Nuñez, en el seu problema 51 trobem el segon problema que estem estudiant:

"Si la diferencia que hi ha entre les parts de la base dividida per la perpendicular fos coneguda, la diferencia dels costats i la perpendicular també fossin conegudes, la base i els costats seran coneguts." [22]

[19] [Pedro Nuñez, 1567] pàg.270: "y por qué sabiendo quatro quantidades proporcionales, tanto se haze multiplicando la primera por la quarta, como la segunda por la tercera".
[20] [Pedro Nuñez, 1567] pàg.270: "y quien esto aun dubdare obre por Regla de 3 diziendo assi…."
[21] [Pedro Nuñez, 1567] pàg.270: "Juan de monteregio igualando, vino a censo y nuero yguales a cosas, porque hizo la posición por otro modo".
[22] [Pedro Nuñez, 1567] pàg.274: "Si la differencia que ay entre las partes de la base divisa por la perpendicular fuere conoseida, y la differencia de los dos lados fuere tambien conoscida, y la perpendicular, la base, y sus partes, y los lados seranconoscidos".

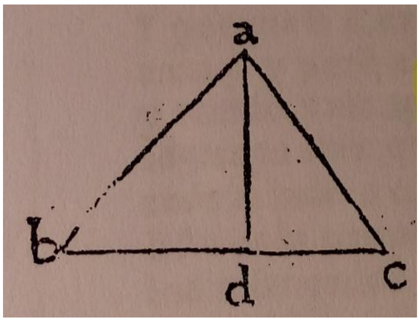


FIGURA 9 Dibuix del triangle per Pedro Nuñez en el *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometria (1567)*

$$bd - dc = 4$$
$$ab - ac = 2$$
$$ad = 12$$

Proposa agafar com a incògnita el segment *dc*, que nosaltres anomenarem x. D'aquesta manera sabem que el segment *bd* és igual a x + 4. Un cop conegut *bd*, aplica el Teorema de Pitàgores als triangles abd i adc, sabent que $ad^2 = 144$.

Primer ho aplica al triangle adc:

$$ac^2 = ad^2 + dc^2 = x^2 + 144$$

I d'aquesta igualtat en dedueix que $ac = \sqrt{x^2 + 144}$

I fa el mateix amb el triangle abd, on $bd^2 = x^2 + 8x + 16$ i sabent el quadrat del segment aplica:

$$ab^2 = ad^2 + db^2 = x^2 + 8x + 160$$

On $ab = \sqrt{x^2 + 8x + 160}$.

Tenint *ac* i *ab*, apliquem que $ab - ac = 2$. És a dir,

$$ab = ac + 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{x^2 + 144} = \sqrt{x^2 + 8x + 160}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 148 + \sqrt{16x^2 + 2304} = x^2 + 8x + 160$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16x^2 + 2304} = 8x + 12$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 2304 = 64x^2 + 192x + 144$$

$$\Leftrightarrow 48x^2 + 192x = 2160 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 45$$

Un cop arriba a aquesta equació diu que utilitzant les regles de l'àlgebra arriba a que *x = 5* i llavors podem saber el valor dels costats del triangle:

- $bd = dc + 4 = 9 \Rightarrow bc = bd + dc = 13$
- $ac = \sqrt{5^2 + 144} = \sqrt{169} = 13$
- $ab = ac + 2 = 15$

En aquest cas, Nuñez explica al final del problema, que aquest problema és la proposició XXIII del segon llibre de Regiomontanus. Ens explica també que Regiomontanus també ho resol mitjançant àlgebra i de manera més ràpida, però donant per suposades proposicions del segon llibre de Euclides. En canvi, segons Nuñez, la seva resolució alternativa és més fàcil ja que no utilitza tantes proposicions.[23]

4.4 Conclusió

Pels dos problemes, Nuñez proposa resolucions alternatives a les solucions de Regiomontanus. Però cal remarcar que en els dos problemes Nuñez ens indica que ha llegit i estudiat les solucions que proposava Regiomontanus, però que ell proposa resolucions alternatives i que per ell són més fàcils d'entendre. Núñez vol mostrar que l'àlgebra, ja que ell la considera ja una ciència, serveix per resoldre problemes geomètrics, en resol molts, entre ells aquests dos de Regiomontanus. Com afirma Núñez: "Saber álgebra es saber científicamente".

Comparant les resolucions de Regiomontanus i de Núñez, veiem que utilitzen les mateixes propietats dels triangles, però amb petites diferències fent que, en el cas de Nuñez, la resolució sigui més fàcil de entendre i es requereix menys demostracions.

La primera diferència, i la més significativa, és la definició de la incògnita. Pedro Nuñez defineix com a incògnita un dels segments en que la base queda dividida per la perpendicular (*bd*). En canvi, l'autor anterior la defineix com la resta dels segments de la base.

Cal destacar que la manera de definir de Nuñez és més similar a la manera amb que ho faríem actualment.

Una altra diferència, és que no parteixen de les mateixes dades, com es pot veure a la Taula 1:

Taula 1. Comparació dels valors utilitzats per Regiomontanus i per Núñez

AUTOR	Regiomontanus	Pedro Nuñez
BASE	20	20
ALTURA	5	5
PROPORCIÓ	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{\sqrt{5}}$

Com podem veure a la Taula 1, Regiomontanus i Nuñez prenen la mateixa base i altura, però diferent proporció entre costats.

[23] [Pedro Nuñez, 1567] pàg.274: "Esta es la proposición 23 del segundo libro de los triángulos de juan de Monteregio, la qual el también resuelve por Algebra, y con menos obra. Pero presupone otra proposición que se demuestra por el segundo libro de Euclides. Y por esta causa para mas facilidad, usando de menos principios, hize la posición por otra arte."

Si comparem la resta de les resolucions, podem veure que són pràcticament iguals. Els dos autors utilitzen el teorema de Pitàgores i apliquen la proporció. En el cas de Nuñez si que resol el problema fins a trobar els costats, però igual que Regiomontanus deixa al lector la resolució de l’equació de segon grau.

Si comparem l'ús que fan de l'àlgebra, podem veure una evolució d'aquesta. Tot i que els dos autors escriuen la resolució de forma retòrica, podem veure com comencen a aparèixer els números i els símbols al llarg de la resolució. Tot i que no s'assembla a la notació actual encara, el simbolisme que utilitza ajuda a facilitar la comprensió i és un pas cap a l'àlgebra actual. Però el més important és que Núñez dedica tota una part del llibre a resoldre problemes geomètrics amb regles algebraiques, mostrant la utilitat de l’àlgebra a la geometria.

5. François Viète (Fontenay-le-Comte,1540 – Paris,1603)

5.1 Dades biogràfiques

Un altre matemàtic que va estudiar la resolució del problema va ser François Viète[24], matemàtic francès, conegut com el pare de l'àlgebra moderna, com hem explicat en la introducció. Va néixer a Fontenay-le-Comte l'any 1540. Va fer estudis jurídics a la universitat de Poitiers i l'any 1560 inicia la seva carrera com advocat.

L'any 1561 començà com a tutor dels fills d'un dels nobles de La Rochelle, càrrec que li va permetre dedicar-se a l'estudi de la ciència. Es en aquesta època on Viète va escriure diferents treballs de matemàtiques i astrologia.

Entre els anys 1570 i 1602, ocupa diferents càrrecs governamentals. És en aquest període quan Viète escriu l'obra que estudiarem.

La solució que proposa Viète al problema que estudiem la trobem en un apèndix al llibre "*Apollonius Gallus seu esuscitata Apollonii Pergaei (per i epafoon) geometria*" que escriu l'any 1600. En concret el trobem en el primer apèndix titulat "*Appendicula I De problematis quòrum geometricam construccionem se nescireait Regiomontanus*".

El títol de l'apèndix es podria traduir com els problemes dels quals Regiomontanus no en sap la construcció geomètrica, fet que ens indica que Viète buscarà una construcció geomètrica als problemes que tant Regiomontanus com Nuñez han resolt mitjançant àlgebra.

Aquest apèndix l'escriu en resposta a les preguntes que li fa Adrianum Romanum respecte a l' obra de Regiomontanus. I en veure que alguns problemes no tenen construcció geomètrica, ell fa la seva pròpia construcció d'aquests.[25]

Cal destacar que Viète resol diferents problemes que proposa Regiomontanus, entre els qual podem trobar el primer problema que estudiem. Del segon, Viète no en proposa cap solució geomètrica en aquesta obra.

5.2 Resolució del primer problema a Viète

Per mostrar la resolució que proposa Viète analitzarem el problema II de l'apèndix "*Appendicula I De problematis quòrum geometricam construccionem se nescireait Regiomontanus*".

Tal i com il·lustrem a la Figura 10, Viète presenta el problema amb el següent enunciat:

Donades la base, l'alçada i la proporció entre els costats del triangle, el triangle serà conegut[26]*.*

[24] Es pot trobar més informació de Viète a https://fr.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te
[25] La història d'aquests problemes s'explica en la introducció de l'obra de Cyriacus que estudiarem en el capítol següent.
[26] [Viète, 1600] pàg 9: " Data base, altitudine, & ratione crurum Trianguli, inuenire Triangulum".

Al problema original, Viète estableix la següent condició:
“Si la base c esta dividida en dos segments c_1 i c_2 tal que $c_1 : c_2 = d : e$, llavors s’hauria de complir que $c_1 c_2 \geq h(c_2 - c_1)$”

Aquesta afirmació no la demostrà en la seva obra després de la seva proposta de resolució.

PROBLEMA II.

Datâ baſe, altitudine, & ratione crurum Trianguli, inuenire Triangulum.

Oportebit autem, cum baſis ſecabitur pro ratione crurum, & Rectangulum quod fit ſub ſegmentis. adplicabitur ad altitudinem, quod indè orietur, maius eſſe differentiâ ſegmentorum baſis.

Sit data Trianguli baſis BD, altitudo Z, ratio crurum vt S, ad R. Oportet inuenire Triangulum. Baſis BD ſecetur bifariam & ad angulos rectos in C à recta AC quæ ſit ipſi Z æqualis, & per A agatur FAG ipſi BD parallela. Eadem baſis BD ſecetur in E ratione crurum vt ſit BE ad ED ſicut S ad R, & agatur HE ipſi AC æqualis & parallela, & ita producatur in I vt quod fit ſub HE EI ſit æquale ei quod fit ſub BE ED & ſecetur EI bifariam in K, & centro K, interuallo EK vel KI deſcribatur circulus quem AC continuata ſecet in punctis L, M, aut demum contingat in M. Secabit enim aut continget circulum illum AC. quoniam cadens in eam ex centro K perpendiculariter erit æqualis ipſi EC, cui ex cautione adiectâ problemati præſtabit aut demum erit æqualis EK ſemidiameter circuli. Denique acta ME ſecet FG in N & connectantur BN ND. Triangulum igitur conſtructum eſt BND, cuius baſis eſt data BD, in quam cadens perpendicularis NO ſit ipſi AC ſeu Z datæ æqualis. Connectatur autem IM. Sunt igitur Triangula ſimilia rectangula NHE IME, & eſt vt NE ad IE ita HE ad EM. Quod fit itaque ſub NE FM æquale eſt ei quod fit ſub HE EI, id eſt Rectangulo ſub BE ED. Quare puncta NBDM ſunt in circulo. In eo autem ſubtenſa BD ſecatur bifariam ad rectos angulos ab AC. quare ſectio eſt per centrum, & ſunt peripheriæ æquales BM MD. angulus igitur BNE angulo END eſt æqualis, & ideò eſt BN ad ND ſicut BE ad ED. Triangulum igitur BND deſcri-

D

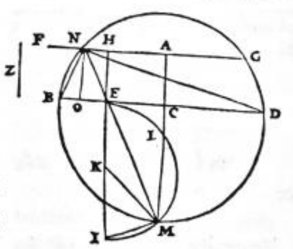


FIGURA 4 Fragment del problema de "*APPENDICULA I De problematis quòrum geometricam construccionem se nescireait Regiomontanus*" **(1600)**

Viète proposa com a resolució una construcció geomètrica abans que una construcció algèbrica. Tot seguit mostrem la construcció tal com la proposa a la seva obra.

Ell afirma que la base del triangle serà el segment *BD*, l'altura del triangle serà igual al segment *Z*, que el dibuixa al la representació, i la proporció entre els costats afirma que serà com *S* és a *D.*

El primer que fa es dibuixar el segment *BD*, bisecar la base en el punt *C* i dibuixar la recta perpendicular a *BD* que passa per *C,* serà *AC*. Després, posa el segment *AC* de mida *Z* en aquesta recta (Figura 11)

Un cop fet això, dibuixa la recta *GF* paral·lela a *BD* , pren *E* en *BD* tal que *BE:ED = e:d* i dibuixa la perpendicular que passa per *E*. Aquesta última perpendicular interseca amb la recta *GF* en el punt *H*.

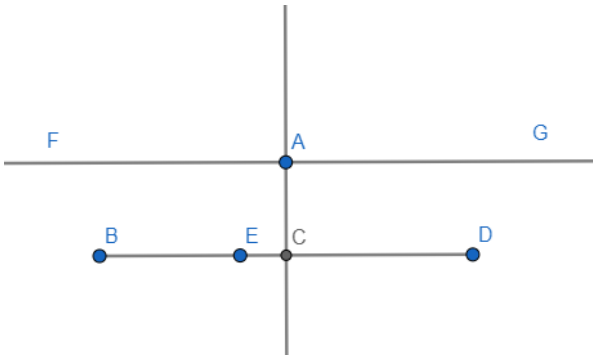


FIGURA 5 Representació dels passos anteriors de Viète fet amb Geogebra.

Pren *I* en *HE* tal que *EH x IE = BE x ED*. I un cop fet això, troba K ,el punt mig de *IE*, i fa un semicercle de radi *IK* i centre *K*. Anomena als punts on es creuen el semicercle i la recta *AC* com a *L i M* (Figura 12).

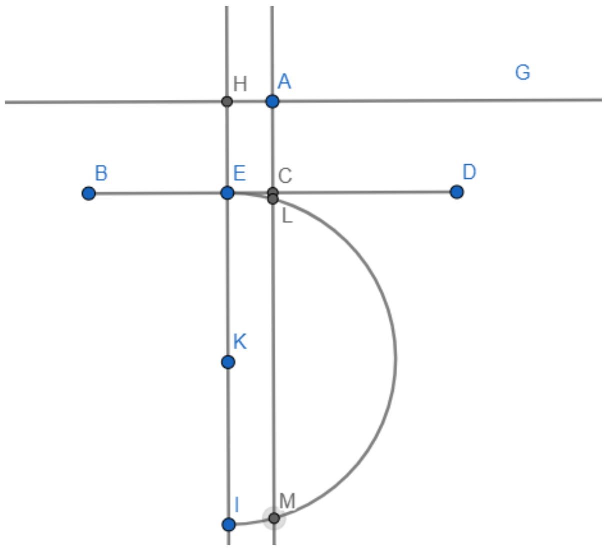


FIGURA 6 Representació dels passos anteriors de Viète fet amb Geogebra.

Per acabar, dibuixa *EM* i la prolonga fins a tallar la recta *GF*. El punt de tall serà *N*, el tercer vèrtex del triangle que buscàvem (Figura 13).

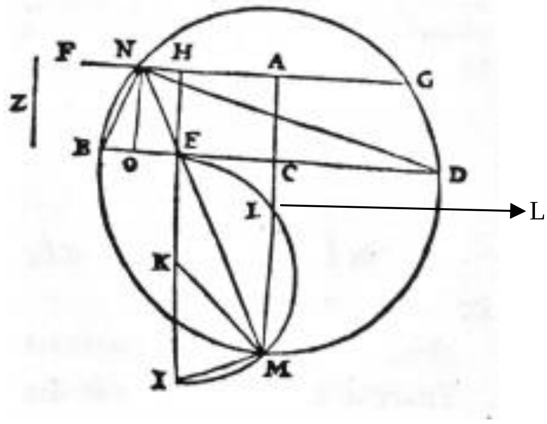


FIGURA 7 Representació geomètrica del problema proposada per Viète (1600)

Després de la construcció geomètrica, volem mostrar que el triangle dibuixat compleix les propietats adequades. Analitzem la seva demostració :

Sabem que $\frac{\mathrm{NE}}{\mathrm{HE}} = \frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{EM}}$ degut a que *NHE i IEM* son triangles semblants. Per tant, *NE x EM = EI x HE*. I com que per construcció hem agafat *I* tal que complia que *EI x HE = BE x ED*. Llavors en podem deduir que *NE x EM = EI x HE = BE x ED*.

Degut aquesta igualtat sabem que *M,B,D i N* estan dins d'un mateix cercle on el seu centre esta dins de *AC*, ja que *AC* es perpendicular a DB i la talla pel mig. Per aquesta raó també sabem que l'arc BM i l'arc MD seran iguals, fet que fa que l'angle BNE sigui igual al END.

Viète afirma que sabent això i pels *Elements* de Euclides (VI -3), $\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{DN}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{ED}}$ i per construcció del punt *I*, sabem que *BE:ED = e:d*. Per tant, la proporció entre els costats és la demanada. I podem afirmar que el triangle compleix les dades orignals.

Aquesta darrera afirmació es fàcil de veure sabent que la proposició 3 del llibre VI és el teorema de la bisectriu. És a dir,

> "Els costats d'un angle d'un triangle són proporcionals als dos segments en què la bisectriu d'aquest angle divideix el costat oposat."[27]

Per tant, com la recta *NEM* bisecta l'angle *BND*, ja que hem vist que l'angle BNE és igual al END. Pel teorema de la bisectriu, la proporció dels costats es igual a la de *BE/ED*. I per construcció del punt *E*, $\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{DN}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{d}}$. Per tant, veiem que la construcció de Viète ens proporciona un triangle que compleix l'enunciat basant-se en un teorema euclidià.

[27] [Euclides] pàg.60: " si se divide en dos partes iguales un ángulo de un triángulo y la recta que corta el ángulo corta también la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los lados restantes del triángulo, la recta trazada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales el ángulo del triángulo"

5.3 Conclusió

Degut a que Regiomontanus diu que no pot resoldre els problema per geometria, Viète fa una construcció geomètrica del problema emprant proposicions euclidianes.Voldria destacar el fet que, el que es considera el pare de l'àlgebra moderna, vulgui demostrar que tot problema es pot demostrar amb geometria.

Si comparem les resolucions anteriors, la resolució geomètrica és la més complexa de les tres. Actualment, degut a que l'àlgebra és la primera opció que tenim per a demostrar problemes geomètrics, pot ser que la demostració geomètrica ens sembli més complexa. Però per entendre la demostració proposada per l'autor fa ús dels *Elements* d'Euclides i de moltes propietats geomètriques, fent que la contrucció sigui més llarga i complexa. I tal i com afirma Regiomontanus la resolució algebraica és molt més curta i ràpida que la resolució geomètrica.

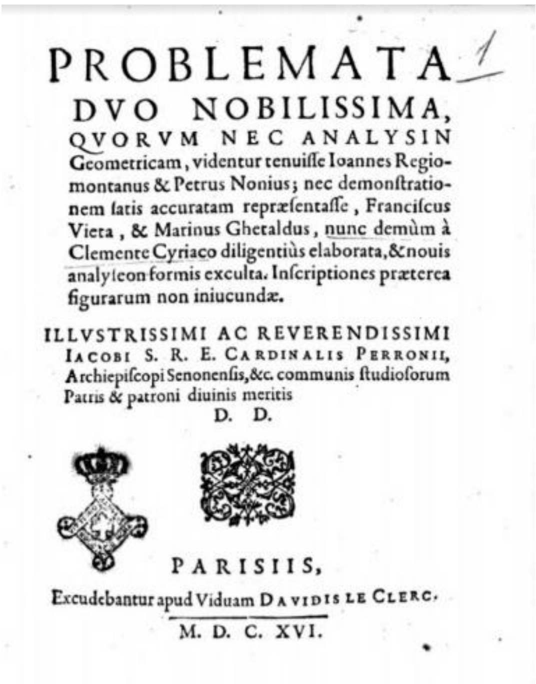
Cal dir que la demostració geomètrica, en una època on l'àlgebra comença a agafar força però encara no era un mètode molt utilitzat ni totalment acceptat, ajuda a demostrar l'existència de solució del problema. Tot i així, sembla que la intenció de Viète és demostrar que tot problema que Regiomontanus resol per àlgebra, pot ser resolt per geometria tot i que l'autor original no ho pogués fer, tal i com indica al títol de l'apèndix.

6. Clemens Cyriacus (Chalon sur Saône,1570-Paris, 1642)

6.1 Dades biogràfiques

Clemens Cyriacus de Mangin va ser un matemàtic francès. Va estudiar llengues clàssiques i hebreu al collège de Chalon sur Saône. Després va ser tutor del Seigneur de Serveille i més tard marxa a Paris on va estudiar matemàtiques i teologia. Finalment va impartir clases com a professor de matemàtiques a un col·legi de Borgonya. Va morir el 26 d'octubre de 1642 a Paris.[28]

Es diu que escrivia textos sota el pseudònim de Denis Henrion o Pièrre Herigone, el qual va pubicar diverses obres, però hi ha molta controvèrsia respecte a qui escrivia sota aquests pseudònims.Entre elles es pot citar la traducció al francès dels 13 llibres d' Euclides que escriurà sota el pseudònim de Henrion i l'obra que analitzarem:*Problemata dúo nobilissima, quórum nec analysin geometricam, videntur tenuisse Ioannes Regiomontanus y Petrus Nonius; nec demonstrationem satis accuratam repraesentasse, Franciscus Vieta y Marinus Ghetaldus nunc demum Clemente Cyriaco diligentius elaborata y Novis analyseon formis exculta. Inscriptionespraeterea figurarum non injucundo*.



PROBLEMATA 1
DVO NOBILISSIMA,
QVORVM NEC ANALYSIN
Geometricam, videntur tenuiſſe Ioannes Regiomontanus & Petrus Nonius; nec demonſtrationem ſatis accuratam repræſentaſſe, Franciſcus Vieta, & Marinus Ghetaldus, nunc demùm à Clemente Cyriaco diligentiùs elaborata, & nouis analyſeon formis exculta. Inſcriptiones præterea figurarum non iniucundæ.

ILLVSTRISSIMI AC REVERENDISSIMI
IACOBI S. R. E. CARDINALIS PERRONII,
Archiepiſcopi Senonenſis, &c. communis ſtudioſorum Patris & patroni diuinis meritis
D. D.

PARISIIS,
Excudebantur apud Viduam DAVIDIS LE CLERC.
M. D. C. XVI.

FIGURA 14 Portada Problemata duo noblissima (1616)

El títol es podria traduir com: *Els dos probleme nobles , dels cuals l'anàlisi geomètrica, que han fet Joannes Regiomontanus i Pedro Nuñez; la demostracio representada suficientment precisa per François Viète i Marino Ghetaldi que Clemens Cyriaco redactarà cuidadosament i anàlisis de noves maneres de fer*.

---

[28] Per saber més de la biografia de Cyriacus:
http://histoire-gignysursaone.blogspot.com.es/2009/12/vie-de-demangin.html

Per tant, tal i com podem apreciar a partir del titol, l’obra de Cyriacus és un estudi de les resolucions proposades per Regiomontanus, Nuñez, Viète i Marino Ghetaldi (1568-1626) del dos problemes que estudiem.

Per aquest autor només analitzarem les resolucions del primer problema de Regiomontanus, Nuñez i Viète. Però l'obra també conté les resolucions de Regiomontanus i Nuñez pel segon problema i la resolució geomètrica proposada per Ghetaldi.

Ghetaldi va ser un matemàtic i físic nascut a Dalmazzia, Reppublica di Ragusa (actual Croàcia) contemporani de Cyriacus que va recórrer Europa on va estudiar amb diferents matemàtics. A París va rebre una forta influència de Viète, i és per aquesta raó que proseguirà amb l'obra de Viète i farà la construcció geomètrica de la resta de problemes de Regiomontanus, entre ells el segon problema que hem estudiat[29].

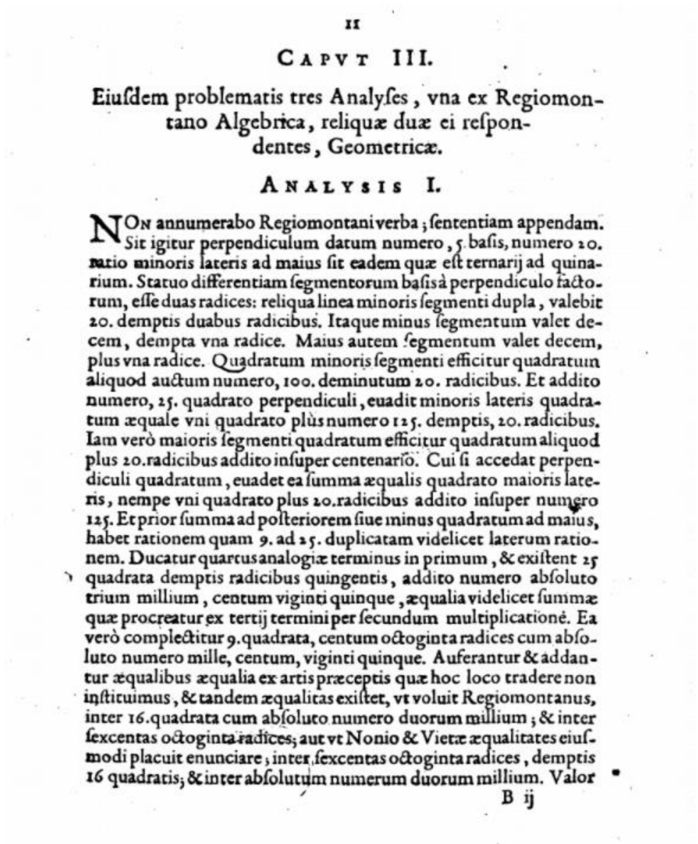
6.2 Anàlisis de les resolucions de Regiomontanus per Cyriacus

Cyriacus fa diverses anàlisis de les solucions de Regiomontanus. De cada problema en farà tres anàlisis. En la primera anàlisi, Cyriacus en reproduirà la resolució proposada per Regiomontanus, en la segona i en la tercera en farà la resolució general amb la mateixa metodologia que utilitza Regiomontanus.

6.2.1 Primera anàlisi del primer problema de Regiomontanus per Cyriacus

La primera anàlisi és la reproducció de la solució proposada pels autors amb números i les següents anàlisis són una generalització de la solució amb llenguatge algebraic.

[29] Es pot trobar més informació sobre la història dels problemes i Ghetaldi a [Conti, 1992]



11

CAPVT III.

Eiuſdem problematis tres Analyſes, vna ex Regiomontano Algebrica, reliquæ duæ ei reſpondentes, Geometricæ.

ANALYSIS I.

NON annumerabo Regiomontani verba; ſententiam appendam. Sit igitur perpendiculum datum numero, 5. baſis, numero 20. ratio minoris lateris ad maius ſit eadem quæ eſt ternarij ad quinarium. Statuo differentiam ſegmentorum baſis à perpendiculo factorum, eſſe duas radices: reliqua linea minoris ſegmenti dupla, valebit 20. demptis duabus radicibus. Itaque minus ſegmentum valet decem, dempta vna radice. Maius autem ſegmentum valet decem, plus vna radice. Quadratum minoris ſegmenti efficitur quadratum aliquod auctum numero, 100. deminutum 20. radicibus. Et addito numero, 25. quadrato perpendiculi, euadit minoris lateris quadratum æquale vni quadrato plùs numero 125. demptis, 20. radicibus. Iam verò maioris ſegmenti quadratum efficitur quadratum aliquod plus 20. radicibus addito inſuper centenario. Cui ſi accedat perpendiculi quadratum, euadet ea ſumma æqualis quadrato maioris lateris, nempe vni quadrato plus 20. radicibus addito inſuper numero 125. Et prior ſumma ad poſteriorem ſiue minus quadratum ad maius, habet rationem quam 9. ad 25. duplicatam videlicet laterum rationem. Ducatur quartus analogiæ terminus in primum, & exiſtent 25 quadrata demptis radicibus quingentis, addito numero abſoluto trium millium, centum viginti quinque, æqualia videlicet ſummæ quæ procreatur ex tertij termini per ſecundum multiplicationé. Ea verò complectitur 9. quadrata, centum octoginta radices cum abſoluto numero mille, centum, viginti quinque. Auferantur & addantur æqualibus æqualia ex artis præceptis quæ hoc loco tradere non inſtituimus, & tandem æqualitas exiſtet, vt voluit Regiomontanus, inter 16. quadrata cum abſoluto numero duorum millium; & inter ſexcentas octoginta radices; aut vt Nonio & Vietæ æqualitates eiuſmodi placuit enunciare; inter ſexcentas octoginta radices, demptis 16 quadratis; & inter abſolutum numerum duorum millium. Valor

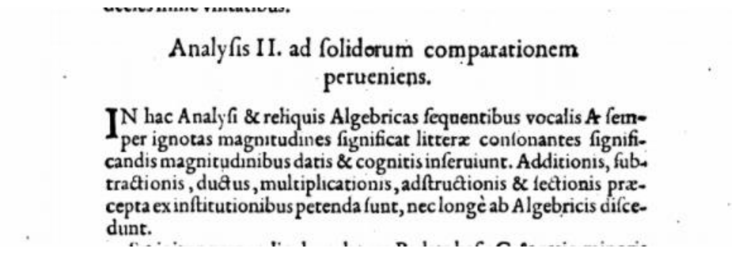
B ij

FIGURA 15 Anàlisi 1 de Cyriacus de la Resolució de Regiomontanus (1616)

Tal i com es mostra en la Figura 15, les análisis es fan en llenguatge retòric i sense símbols, de la meteixa manera que va fer Regiomontanus. Tota la obra està escrita així, però en la segona anàlisi de Regiomontanus, Cyriacus com Viète, va utilitzar lletres per anomenar tant les magnituds conegudes com les desconegudes. Utilitza com Viète les lletres consonants per a magnituds conegudes i les vocals, en aquest cas A, per a la magnitud incògnita. Per a facilitar la notació i la comprensió utilitzaré la *X* com a incògnita.

6.2.2 Segona anàlisi del primer problema de Regiomontanus per Cyriacus

Tal i com es pot veure en la Figura 16, Cyriacus comença l'anàlisi explicant les variables que utilitzarà. És a dir, utilitzarà les consonants per a les magnituts conegudes i la vocal A per la magnitud desconeguda. En el nostre estudi, utilitzaré la lletra X enlloc de la A per a simplificar la lectura.



Analyſis II. ad ſolidorum comparationem perueniens.

IN hac Analyſi & reliquis Algebricas ſequentibus vocalis A ſemper ignotas magnitudines ſignificat litteræ conſonantes ſignificandis magnitudinibus datis & cognitis inſeruiunt. Additionis, ſubtractionis, ductus, multiplicationis, adſtructionis & ſectionis præcepta ex inſtitutionibus petenda ſunt, nec longè ab Algebricis diſcedunt.

FIGURA 16 Fragment del Anàlisi 2 on explica la utilització de les lletres .

Després Cyriacus defineix les magnituds conegudes, és a dir, suposa que la base del triangle és C, l'altura és B i la raó entre els costats és:

$$\frac{costat\ petit}{costat\ gran} = \frac{D}{F}$$

Sabem que la base *C*, queda dividida per la perpendicular en dos segments.

Sabent que la suma dels segments de la base és *C*, definim *X* tal que el segment gran menys el segment petit és *2X*. D'aquí dedueix que $el\ segment\ petit\ = \frac{C}{2} - X$.

Un cop sabem l'expressió del segment petit, podem calcular-ne el seu quadrat:

$$segment\ petit^2 = \frac{C^2}{4} - CA + X^2$$

I si aquest li sumem B^2 i usant el que actualment coneixem com el teorema de Pitàgores, obtenim el quadrat del costat petit .

$$costat\ petit^2 = B^2 + \frac{C^2}{4} - CX + X^2$$

Si repetim el procés amb el segment gran de la base, llavors $el\ segment\ gran = \frac{C}{2} + X$ i elevant al quadrat :

$$costat\ gran^{\ 2} = B^2 + \frac{C^2}{4} + CX + X^2$$

Un cop obtingut el quadrat dels costats, podem aplicar la proporció.

Sabem que la proporció és $\frac{\text{costat petit}}{\text{costat gran}} = \frac{\text{D}}{\text{F}}$, i podem trobar la tercera proporcional *G* tal que $\frac{\text{costat petit}^2}{\text{costat gran}^2} = \frac{\text{D}}{\text{G}}$.

Donades *D, F, G* , tres magnituds proporcionals, la tercera proporcional és aquella que compleix:

$$\frac{D}{F} = \frac{F}{G}$$

Per tant, $G = \frac{F^2}{D}$ i $\frac{D^2}{F^2} = \frac{D}{G} \rightarrow \frac{D}{F} = \frac{D}{G}$.

Així, podem afirmar que la raó entre els quadrats dels cosats és com *D* a *G*.

Si fem la proporció amb les expressions obtingudes anteriorment, tenim aquesta igualtat.

$$\frac{B^2 + \frac{C^2}{4} - CX + X^2}{B^2 + \frac{C^2}{4} + CX + X^2} = \frac{D}{G}$$

Apliquem que la primera per la quarta és igual al producte de la segona per la tercera (*Elements d'Euclides*) i s' obté:

$$(B^2 + \frac{C^2}{4} - CX + X^2)G = (B^2 + \frac{C^2}{4} + CX + X^2)D$$
$$GB^2 + G\frac{C^2}{4} - GCX + GX^2 = DB^2 + D\frac{C^2}{4} + DCX + DX^2$$
$$(G-D)B^2 + (G-D)\frac{C^2}{4} + (G-D)X^2 = (D+G)CX$$

Aquests dos passos, Cyriacus no els fa, sinó que afirma que en arreglar la igualtat les magnituds que estan al quadrat es fan petites i el rectangle *CX* es fa més gran, ja que en el primer cas tenim *D-G* i en el segon *D+G*.

Un cop arreglades les equacions, defineix *H* que sigui la diferencia entre *G* i *D*, de la següent manera $H = (G - D)$ i obtenim

$$HB^2 + H\frac{C^2}{4} + HX^2 = (D+G)CX$$

I arribats a aquest punt, Cyriacus diu que podem trobar L tal que HL=(D+G)C

$HB^2 + H\frac{C^2}{4} + HX^2 = HLX$ → $B^2 + \frac{C^2}{4} = LX - X^2$

Definim $M^2 = B^2 + \frac{C^2}{4}$ i obtenim la següent equació: $M^2 = LX - X^2 = X(L - X)$. Reorganitzant aquesta darrera equació, trobem:

$$\frac{X}{M} = \frac{M}{L - X}$$

Segons Cyriacus, per la resolució d'aquesta equació, es poden utilitzar la regla explicada en la primera part del llibre de "Algebra en arithmetica y geometria" capítol 4 de Pedro Nuñez , en el capítol 12 de la obra de Christopher Clavius i la proposició 13 del llibre 10 de Campanus[30]

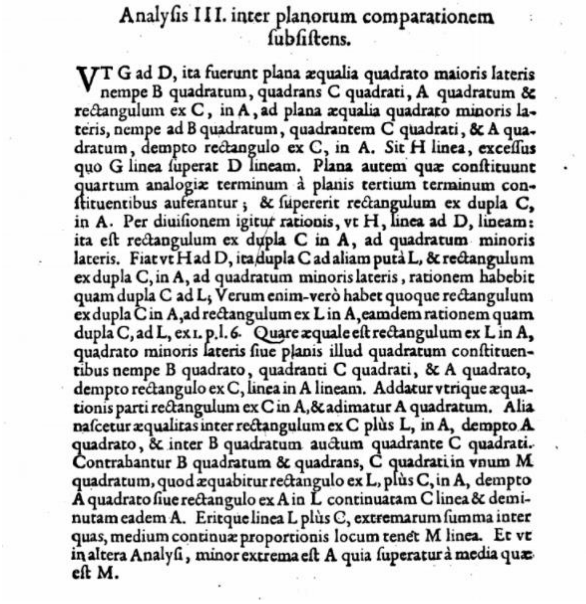
Cyriacus afirma que aquestes resolucions són una altra manera d'expressar[31] la proposició 13 de Viete: " Donats la mitjana proporcional i la suma dels extrems, trobarem l' extrem". [32] Cyriacus diu que coneixent *M*, que és la mitjana proporcional, i *(L - X)* que és la suma dels extrems, podem trobar *X* mitjançant el teorema anterior.

Per tant, ens dona diferents autors i proposicions que ens permet relacionar la resolució d'equacións amb la Geometria.

[30] En [BUSARD, 2005] pàg 315-316: podem trobar la proposició 13 de Campanus .
[31][Cyriacus, 1616] pàg 14: "Quod à vieta, essectionum canonicarum propositione decimatertia, alijs verbis enunciatur".
[32] [Cyriacus, 1616] pàg 14:" Data media trium continue proportionalium & aggregato extremarum, invenire extremes".

6.2.3 Tercera anàlisi del primer problema de Regiomontanusper Cyriacus

En la tercera anàlisi (Figura 17), Cyriacus vol fer una demostració general però intentant no tenir productes de tres magnituds. Vol fer una demostració on hi hagi productes de com a màxim dues magnituds.


Analysis III. inter planorum comparationem subsistens.

VT G ad D, ita fuerunt plana æqualia quadrato maioris lateris nempe B quadratum, quadrans C quadrati, A quadratum & rectangulum ex C, in A, ad plana æqualia quadrato minoris lateris, nempe ad B quadratum, quadrantem C quadrati, & A quadratum, dempto rectangulo ex C, in A. Sit H linea, excessus quo G linea superat D lineam. Plana autem quæ constituunt quartum analogiæ terminum à planis tertium terminum constituentibus auferantur; & supererit rectangulum ex dupla C, in A. Per diuisionem igitur rationis, vt H, linea ad D, lineam: ita est rectangulum ex dupla C in A, ad quadratum minoris lateris. Fiat vt H ad D, ita dupla C ad aliam putà L, & rectangulum ex dupla C, in A, ad quadratum minoris lateris, rationem habebit quam dupla C ad L; Verum enim-verò habet quoque rectangulum ex dupla C in A, ad rectangulum ex L in A, eamdem rationem quam dupla C, ad L, ex 1. p. l. 6. Quare æquale est rectangulum ex L in A, quadrato minoris lateris siue planis illud quadratum constituentibus nempe B quadrato, quadranti C quadrati, & A quadrato, dempto rectangulo ex C, linea in A lineam. Addatur vtrique æquationis parti rectangulum ex C in A, & adimatur A quadratum. Alia nascetur æqualitas inter rectangulum ex C plùs L, in A, dempto A quadrato, & inter B quadratum auctum quadrante C quadrati. Contrahantur B quadratum & quadrans, C quadrati in vnum M quadratum, quod æquabitur rectangulo ex L, plùs C, in A, dempto A quadrato siue rectangulo ex A in L continuatam C linea & deminutam eadem A. Eritque linea L plùs C, extremarum summa inter quas, medium continuæ proportionis locum tenet M linea. Et vt in altera Analysi, minor extrema est A quia superatur à media quæ est M.

FIGURA 17 Fragment de l'Anàlisi 3 del primer problema de Regiomontanus de Cyriacus (1616)

Aquesta tercera anàlisi parteix de l'anterior, en concret des del pas on:

$$\frac{B^2 + \frac{C^2}{4} + CX + X^2}{B^2 + \frac{C^2}{4} - CX + X^2} = \frac{G}{D}$$

Un cop arriba aquí, aplica que si:

$$\frac{a}{b} = \frac{C}{d} \to \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

De manera que obté :

$$\frac{2CX}{B^2 + \frac{C^2}{4} - CX + X^2} = \frac{G-D}{D}$$

I tal i com hem definit en l'anàlisi anterior, definim *H = G-D* i la igualtat resultant és:

$$\frac{2CX}{B^2 + \frac{C^2}{4} - CX + X^2} = \frac{H}{D}$$

Definim ara una L tal que :

$$\frac{H}{D} = \frac{2C}{L}$$

I per tant,

$$\frac{2CX}{B^2 + \frac{C^2}{4} - CX + X^2} = \frac{2C}{L} = \frac{2CX}{LX}$$

D'aquesta última igualtat de proporcions en podem deduir que els denominadors han de ser iguals ja que els numeradors són iguals. I per tant obtenim una equació de segon grau.

$$B^2 + \frac{C^2}{4} - CX + X^2 = LX$$

I arreglant aquesta equació obtenim:

$$B^2 + \frac{C^2}{4} = (L + C)X - X^2$$

Definint $B^2 + \frac{C^2}{4} = M^2$, obtenim una equació similar a la de l'analisi anterior i que es pot resoldre pel mateix mètode.

En aquesta darrera anàlisi es remarca la necessitat de que en una equació es mantingui el grau i l'homogeneïtat a les magnituds. És a dir, si tenim una X^2 tota la resta de termes de la equació han de ser productes entre dos magnituds o quadrats. Aquest és un fet al que a partir de Viète se li donarà molta impòrtancia. Aquesta homogeneïtat de magnituds té sentit si mirem les equacions en un sentit geomètric. Si fessim $X^2 + X$, per exemple, estaríem sumant un pla i una recta, cosa que geomètricament no té sentit.

En concret, en aquesta tercera anàlisi, Cyriacus vol demostrar que es pot resoldre el problema sense la necessitat de tenir una equació de sòlids, tres magnituds multiplicades, i que es pot resoldre amb plans, és a dir, on en el producte màxim de magnituds només n'hi ha dues.

Aquestes dues anàlisis també ens mostren com va canviant l'ús de l'àlgebra i la geometria. En aquest cas, Cyriacus utilitza la resolució algebraica de Regiomontanus i per a la resolució de l'equació de segon grau una demostració geometrica d'aquesta. Fet que ens fa notar que si abans s'utilitzava l'àlgebra per resoldre problemes de geometria, es continua utilitzant la geometria per demostrar la solució de l'equació algebraica.

6.3 Anàlisi de les resolucions de Nuñez per Cyriacus

Després de l'anàlisi de la resolució del primer problema de Regiomontanus, Cyriacus reprodueix l'anàlisi per a la resolució proposada per Nuñez per aquest problema.

6.3.1 Primera anàlisi del primer problema de Nuñez per Cyriacus

Tal i com fa en la resolució de Regiomontanus, en aquesta primera anàlisi en reproduirà la resolució proposada per Nuñez en l'obra original.

15

CAPVT IIII.

Aliæ item tres eiuſdem problematis Analyſes vna ex Petro Nonio Algebrica, & ei reſpondentes, duæ Geometricæ, cum additamentis quibuſdam.

ANALYSIS PRIMA.

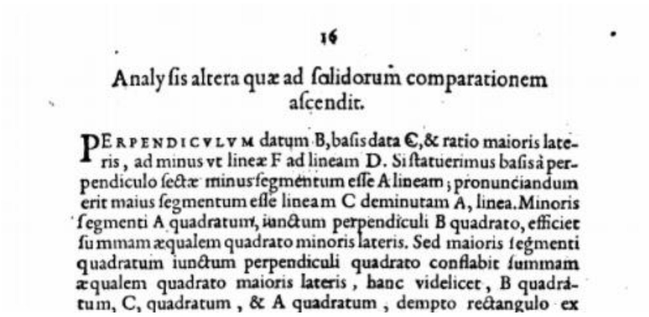
PERPENDICVLVM æſtimetur numero quinque Baſis numero viginti, & maius latus ad minus, rationem habeat quam latus ſurdi quadrati, quinque, ad vnitatem. Statuo baſis à perpendiculo ſectæ minus ſegmentum eſſe vnam Radicem. Itaque maius ſegmentum valebit viginti, dempta vna Radice. Quadratum è minori ſegmento cùm perpendiculi quadrato, euadit quadratum aliquod auctum numero viginti quinque, & æquatur quadrato minoris lateris. Quadratum autem è maiori ſegmento iunctum eiuſdem perpendiculi quadrato æquatur quadrato maioris lateris, efficiturque quadratum aliquod auctum numero quadringentornm viginti quinque, deminutum quadraginta Radicibus. Et quia maius quadratum ad minus, duplicatam habet laterum rationem erit maior ſumma ad minorem, quemadmodum quinque ad vnum. Neque ex primi termini in quartum ductu, mutatur ſumma: intelligitur tamen eſſe æqualis ei quæ fit ex ſecundi termini ductu in tertium, quinque videlicet quadratis, plus numero centum viginti quinque. Si æqualibus æqualia fuerint addita & adempta ex artis præceptis, quatuor quadrata plus quadraginta radicibus æquabuntur tandem abſoluto numero trecentorum Aut facta vtriuſque partis per numerum quadratorum diuiſione; Quadratum aliquod auctum decem radicibus, æquabitur numero abſoluto ſeptuaginta quinque. Valor radicis ſiue minoris ſegmenti deprehendetur eſſe quinque. Maioris ſegmenti valor, qnindecim. Et maioris lateris quadratum, ducentorum quinquaginta, ad minoris lateris quadratum, quinquaginta, rationem habet quam quinque ad vnum.

FIGURA 18 Primera anàlisi de la resolució de Nuñez de Cyriacus (1616)

Tal i com podem veure en la Figura 18, en aquest cas també en fa una resolució de manera retòrica i no utilitzarà cap dels símbols que utilitza Nuñez en la resolució dels problemes. Tot i així, el contingut de la resolució és conceptualment idèntic al que proposa Nuñez.

6.3.2 Segona anàlisi del primer problema de Nuñez per Cyriacus

La segona anàlisi (Figura 19) que fa es tracta d’una resolució general, on les magnituds conegudes les representa amb consonants i la incògnita es la lletra A. Com en el cas anterior, per a simplificar la comprensió, en el nostre cas utilitzarem la lletra X per a la incògnita.



16

Analyſis altera quæ ad ſolidorum comparationem aſcendit.

PERPENDICVLVM datum B, baſis data C, & ratio maioris lateris, ad minus vt lineæ F ad lineam D. Si ſtatuerimus baſis à perpendiculo ſectæ minus ſegmentum eſſe A lineam; pronunciandum erit maius ſegmentum eſſe lineam C deminutam A, linea. Minoris ſegmenti A quadratum, iunctum perpendiculi B quadrato, efficiet ſummam æqualem quadrato minoris lateris. Sed maioris ſegmenti quadratum iunctum perpendiculi quadrato conflabit ſummam æqualem quadrato maioris lateris, hanc videlicet, B quadratum, C, quadratum, & A quadratum, dempto rectangulo ex

FIGURA 19 Inici de l'ànalisi 2 on explica les magnituds conegudes i indica quina serà la incògnita de Cyriacus (1616)

El primer que fa és definir les magnituds conegudes, és a dir, suposa que la base del triangle és *C*, l'altura és *B* i la raó entre els costats és:

$$\frac{costat\ petit}{costat\ gran} = \frac{D}{F}$$

Sabem que la base *C*, queda dividida per la perpendicular en dos segments. En aquest cas i a diferència de la resolució de Regiomontanus, prenem com a incognita el segment petit de la base.

Llavors sabem que

$$costat\ petit^2 = B^2 + (segment\ petit)^2 = B^2 + X^2$$

Sabent que el segment gran és *C-X* i repetint el procés que hem fet amb el costat petit podem saber que:

$$costat\ gran^2 = B^2 + C^2 - 2CX + X^2$$

Sabem que la proporció és $\frac{\text{costat gran}}{\text{costat petit}} = \frac{\text{F}}{\text{D}}$, i podem trobar la tercera proporcional G tal que $\frac{\text{costat gran}^2}{\text{costat petit}^2} = \frac{\text{G}}{\text{D}}$, tal i com fa en l'anàlisi de la resolució de Regiomontanus.

Aplicant la proporció obtenim

$$\frac{B^2 + C^2 - 2CX + X^2}{B^2 + X^2} = \frac{G}{D}$$

I multiplicant en creu arribem a que

$$(B^2 + C^2 - 2CX + X^2)D = G(B^2 + X^2)$$

I arreglant aquesta expressió i anomenant *H = G-D*

$$DB^2 + DC^2 = GB^2 + (G - D)X^2 + 2CDX = GB^2 + HX^2 + 2CDX$$

Definim HL^2 com a la suma de $DB^2 + DC^2 - GB^2$ i *HM* com a *2CD.* I així obtenim:

$$HL^2 = HX^2 + HMX$$

I d'aquí n'obtenim l'equació final $L^2 = X^2 + MX = X(M + X)$ que equival a $\frac{X}{L} = \frac{L}{X+M}$.

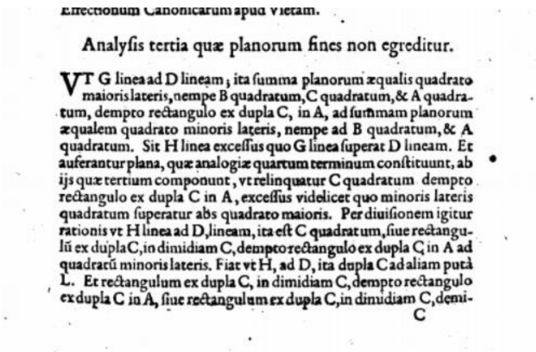
Aquesta darrera proporció es resol gràcies a la proposició 12 del llibre de Viète i que es similar a la utilitzada en les anteriors anàlisis de Regiomontanus.

En aquesta anàlisi podem veure que les resolucions dels dos primers autors, Regiomontanus i Nuñez són resolucions molt similars i que la gran diferència entre elles és la manera en que triem la incògnita, però llevat d'aquest pas ambdues resolucions tenen més coses en comú que no de diferents.

En aquest cas també, Cyriacus demostra l'existència de la solució mitjançant una propietat geomètrica demostrant un altre cop que en una demostració es pot combinar resolucions geomètriques i algebraiques.

6.3.3 Tercera anàlisi del primer problema de Nuñez per Cyriacus

Per a la resolució de Nuñez també en fa l'anàlisi sense utilitzar productes de tres magnituds, que és anàloga a la que va fer Regiomontanus, però amb la diferència de la equació final, ja que varien termes degut a la manera de triar la variable (Figura 20).


Effectionum Canonicarum apud Vietam.

Analysis tertia quæ planorum fines non egreditur.

VT G linea ad D lineam; ita summa planorum æqualis quadrato maioris lateris, nempe B quadratum, C quadratum, & A quadratum, dempto rectangulo ex dupla C, in A, ad summam planorum æqualem quadrato minoris lateris, nempe ad B quadratum, & A quadratum. Sit H linea excessus quo G linea superat D lineam. Et auferantur plana, quæ analogiæ quartum terminum constituunt, ab ijs quæ tertium componunt, vt relinquatur C quadratum dempto rectangulo ex dupla C in A, excessus videlicet quo minoris lateris quadratum superatur abs quadrato maioris. Per diuisionem igitur rationis vt H linea ad D, lineam, ita est C quadratum, siue rectangulũ ex dupla C, in dimidiam C, dempto rectangulo ex dupla C in A ad quadratũ minoris lateris. Fiat vt H, ad D, ita dupla C ad aliam putà L. Et rectangulum ex dupla C, in dimidiam C, dempto rectangulo ex dupla C in A, siue rectangulum ex dupla C, in dimidiam C, demi-
C

FIGURA 20 Fragment de la tercera anàlisi de la resolució de Nuñez a Cyriacus (1616)

Parteix també de l'apartat anterior en concret desde:

$$\frac{B^2 + C^2 - 2CX + X^2}{B^2 + X^2} = \frac{G}{D}$$

Sigui *H = G -D*, i apliquem que si:

$$\frac{a}{b} = \frac{C}{d} \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

De manera que obté :

$$\frac{C^2 - 2CX}{B^2 + X^2} = \frac{G-D}{D} = \frac{H}{D}$$

Definim ara una L tal que :

$$\frac{H}{D} = \frac{2C}{L}$$

I per tant,

$$\frac{c^2 - 2CX}{B^2 + X^2} = \frac{2C}{L} = \frac{2C(\frac{C}{2} - X)}{L(\frac{C}{2} - X)}$$

D'aquesta última igualtat de proporcions en podem deduir que els denominadors han de ser iguals ja que els numeradors són iguals. I per tant obtenim una equació de segon grau.

$$B^2 + X^2 = L(\frac{C}{2} - X)$$

I arreglant aquesta equació obtenim:

$$B^2 - \frac{LC}{2} = X^2 - XL$$

I definint $B^2 - \frac{LC}{2} = M^2$, obtenim l'equació següent:

$$M^2 = X^2 - XL = X(X - L)$$

Que es resol de la mateixa manera que la resolució general de Regiomontanus, és a dir, sabem que:

$$\frac{A}{M} = \frac{M}{X - L}$$

Aquesta equació es del mateix tipus que la equació que obteniem a l 'analisi de la resolució de Regiomontanus, i per tant es pot resoldre mitjançant la proposició 13 de Viète.

6.4 Comentaris de Cyriacus

En finalitzar les anàlisis de les resolucions de Nuñez i abans de continuar amb l’estudi d'un altre problema, Cyriacus escriu un apartat anomenat *Additamenta quaedam ad methosum nostram pertinentia.* En aquest apartat l'autor explica que en els problemes d'aquest tipus ens podem trobar, tal i com ha passat amb les anàlisi dels autors anteriors, amb una equació que és pot escriure com una igualtat de propoorcions. Aquestes proporcions diu que poden ser de tres tipus diferents.

Els dos primers tipus són aquells tals que la proporció inclou una suma o una resta. Si ens fixem en el que ens ha sortit en els apartats anteriors, serien equacions del tipus:

$$\mathrm{M}^2 = \mathrm{X}^2 - \mathrm{XL} \quad \mathrm{o} \quad \mathrm{M}^2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{XL}$$

Aquestes equacions són les que en fer la proporció inclouen una suma o una resta, tal i com hem vist al llarg del treball de Cyriacus en les resolucions de Regiomontanus i Nuñez.

L'autor afegeix també que es podria donar el cas on l'equació final pot tenir una expressió més complicada. Aquests casos combinen els casos anteriors de equacions. En concret diu que en aquests casos la proporció té una suma i una resta on apareix la magnitud desconeguda. Per aquests casos, Cyriacus afirma que la resolució es complica però que es pot resoldre i en proposa una possible resolució.

6.5 Anàlisi de la resolució de Viète

Dels autors treballats anteriorment i en relació al primer problema, Cyriacus en fa tres anàlisis de les seves resolucions. En canvi, per a la demostració geomètrica proposada per Viète en fa tres crítiques. En concret critica tres dels aspectes de la resolució de Viète, de les quals només analitzarem en profunditat la tercera.

En la primera en critica el fet que Viète no demostri perque la recta ACM queda a la dreta del punt E. Cyriacus, en aquesta critica i a través de proposicions dels Elements d'Euclides, demostra que es cert que la recta ACM queda a la dreta del punt E (Figura 21).

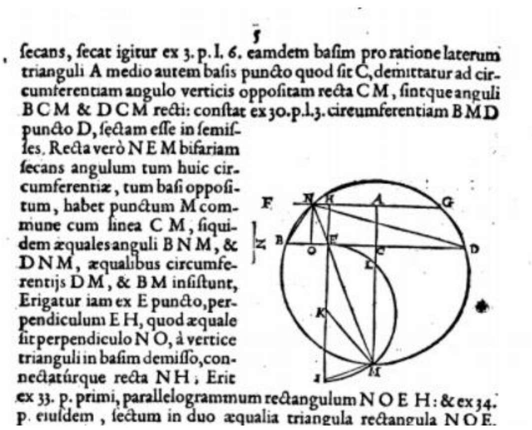

ſecans, ſecat igitur ex 3. p. l. 6. eamdem baſim pro ratione laterum trianguli A medio autem baſis puncto quod ſit C, demittatur ad circumferentiam angulo verticis oppoſitam recta C M, ſintque anguli B C M & D C M recti: conſtat ex 30. p. l. 3. circumferentiam B M D puncto D, ſectam eſſe in ſemiſſes. Recta verò N E M bifariam ſecans angulum tum huic circumferentiæ, tum baſi oppoſitum, habet punctum M commune cum linea C M, ſiquidem æquales anguli B N M, & D N M, æqualibus circumferentijs D M, & B M inſiſtunt, Erigatur iam ex E puncto, perpendiculum E H, quod æquale ſit perpendiculo N O, à vertice trianguli in baſim demiſſo, connectatúrque recta N H; Erit ex 33. p. primi, parallelogrammum rectangulum N O E H: & ex 34. p. eiuſdem, ſectum in duo æqualia triangula rectangula N O E.

FIGURA 21 Fragment de la primera crítica de Cyriacus (1616)

En la segona crítica es refelxiona sobre que passaria si el cercle MDL talli en un únic punt la recta (OSD) que divideix en dues parts iguals la base del trangle, BC (Figura 22). En la resolució de Viète, ell només contempla el cas en que el cercle talli en dos punts.

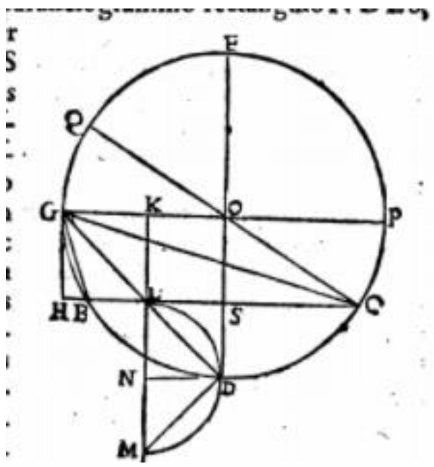


FIGURA 22 Imatge que acompanya la segona crítica de Cyriacus (1616)

La tercera crítica, en canvi, la fa preguntant-se l'existència de més d'una solució. Tal i com hem vist en les resolucions algebraiques, la solució es troba mitjançant una equació de segon grau i per tant, podria ser que hi hagin dues solucions.

Per això, Cyriacus vol demostrar que, amb el mateix raonament de Viète, podem trobar una segona solució, tal i com es veu en la Figura 23.

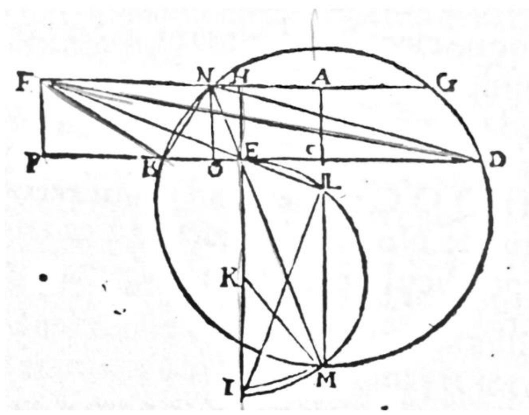


FIGURA 23 Representació de la solució de Viète segons Cyriacus(1616)

El triangle que proposa Cyriacus com una altra solució és el triangle BFD, que té la mateixa alçada i base que el triangle BND (Figura 23).

Per trobar el triangle BFD es fa la mateixa resolució, fins quan dibuixem el semicercle amb centre K i radi KI. En la resolució proposada per Viète pren el punt M. Per a la resolució alternativa de Cyriacus hem de tenir en compte que aquest cercle pot tallar en més d'un punt, i es pregunta que passa si prenem el punt L. Tracem la recta EL i busquem el punt on es creua aquesta recta i la NG, i aquest punt serà el vèrtex del nou triangle.

I aquest triangle compleix tot el que buscàvem. És fàcil demostrar que el triangle té la base i l'altura demanada, per a demostrar que es compleix la raó entre els costats, es pot aplicar el mateix que amb l'altre triangle. És a dir, dibuixem el cercle que passi pels punts F, B, L, D i que el seu centre està en la recta AL. Amb aquest cercle es veu que, degut a que els arcs BL i LD són iguals, la recta LE bisecta l'angle del vèrtex F. I per el teorema de l'altura, els costats tindran la mateixa proporció que la dels segments de la base, que per construcció era la demanada.

Per tant, Cyriacus demostra que en la resolució de Viète existeix una altra solució que l'autor no contempla en la seva anàlisi, fet pel qual Cyriacus en fa una crítica.

7. Comparació entre els Autors

Regiomontanus fa una resolució algebraica i de manera retòrica. Al principi de la resolució deixa clar que ho resol mitjançant àlgebra degut a que no en troba una resolució geomètrica, fet que ens remarca que la seva voluntat inicial era fer-ho de manera geomètrica. També cal destacar que resol un cas concret prenent números per a les magnituds conegudes.

En l'obra de Nuñez també es fa una resolució algebraica i retòrica, però utilitza símbols per a simplificar la notació. Tal i com es pot veure en el punt 4.1 d'aquest treball, utilitza símbols per a les operacions aritmètiques (p per la suma i m per la resta) i per les magnituds desconegudes (co, ce). Tal i com afirma Nuñez al final de les resolucions dels dos problemes, la seva resolució és alternativa a la proposada per Regiomontanus, però més senzilla d'entendre. Tot i que Núñez fa tot un apartat de problemes geomètrics resolts amb regles algebraiques, cosa que no va fer Regiomontanus ja que el seu llibre no era d'àlgebra.

Després d'analitzar les dues respostes, es poden veure que les resolucions tenen passos semblants, com utilitzar el Teorema de Pitàgores en els dos problemes, però també hi han grans diferències. Aquestes diferències es veuen en els valors agafats per a la resolució del problema i la manera de definir la magnitud desconeguda. Degut a la manera com es defineix la incògnita, la resolució de Nuñez és més curta i fàcil d'entendre.

Si ens fixem en la resolució de Viète, veiem que és molt diferent a les anteriors ja que fa una resolució geomètrica. Estudiant la seva demostració, comprovem que la demostració algebraica és més curta i més fàcil que la geomètrica.

En el cas de Cyriacus, ell no en fa una resolució, en fa anàlisis de totes les resolucions. Per als primers autors reprodueix la resolució original i en fa la resolució general. Aquestes estan escrites de manera retòrica i no utilitza símbols. En la solució general, Cyriacus usa raonaments geomètrics per a la resolució de les equacions, fet que combina la voluntat de voler fer una resolució algebraica i la necessitat de l'època de demostrar geometricament els passos que es feien.

Tot i que en aquest treball no en parlem, en l'obra de Cyriacus s'inclou també el segon problema amb tres anàlisis per a cada autor i amb la resolució geomètrica proposada per Ghetaldi. Per tant, a diferència de les altres obres, es fa una recopilació de les posibles resolucions proposades per a fer els problemes i l'analisi d'aquestes, més que una finalitat de demostrar o aportar la seva propia resolució.

Per a simplificar la comparació, la Taula 2 resumeix els aspectes característics de cada autor i els aspectes que els diferencien.

TAULA 2 Comparació entre els diversos autors i les seves resolucions

ANY	AUTOR	Problema 1	Problema2	Cyriacus (1616)
1464	Regiomontanus	Resolució algebraica de manera retòrica i mitjançant un exemple.	Resolució algebraica de manera retòrica i mitjançant un exemple.	En fa tres anàlisis, la resolució del autor i dues resolucions generals pels dos problemes.
1567	Nuñez	Resolució algebraica i de manera retòrica. Utilitza símbols per a escriure les equacions.	Resolució algebraica i de manera retòrica. Utilitza símbols per a escriure les equacions.	En fa tres anàlisis, la resolució del autor i dues resolucions generals pels dos problemes.
1600	Viète	Resolució geomètrica.	No fa una resolució del problema.	Cyriacus fa tres crítiques per a la resolució geomètrica.

8. Conclusions

La finalitat d'aquest treball era estudiar com es va dur a terme l'inici del procés d' algebrització mitjançant l'anàlisi de la resolució de dos problemes plantejats per Regiomontanus el 1464 i les resolucions posteriors d'aquest. Encara que aquests problemes no són gaire coneguts ara, van ser problemes de gran repercussió a l'època i són d'extremada rellevància dins la història de les matemàtiques.

Aquests problemes són uns dels primers que es resoldran mitjançant àlgebra i que serviran de exemple per a l'estudi de l'ús de l'àlgebra, tal i com fa Nuñez en el seu llibre d'àlgebra. Tot i que la simbologia anirà canviant en el pas del temps, podem veure en les resolucions dels autors estudiats que els passos que fan i els teoremes que usen són molt similars als que utilitzarem avui en dia.

El procés d'algebrització és un procés llarg i l'àlgebra tardarà en ser utilitzada com a via per a resoldre problemes geomètrics. Això es pot notar en que Viète fa una resolució geomètrica tot i que ell serà considerat el pare de l'àlgebra moderna. Es per això que és important estudiar els primers problemes que es van resoldre per saber com es va anar desenvolupant el procés.

Un altre motiu pel qual és important estudiar com va començar l'algebització de les matemàtiques és que l'àlgebra és un mètode fonamental per a la resolució de problemes actuals. L'estudi, anàlisi i comparació de la resolució dels problemes i les equacions fa que ens replantegem per a quin motiu resolem les equacions i quin significat té aquesta solució.

Per aquest darrer motiu vull destacar l'obra de Cyriacus, ja que ens justifica geomètricament que les equacions tenen solució. Per tant, una de les seves finalitats era demostrar que tant si es resol geomètricament com si es fa algebraicament, les solucions eren igual de vàlides, tot i que en faci crítiques d'algunes.

Vull destacar també que estudiar el procés que s'estava duent a terme era una altra possible finalitat de l'obra de Cyriacus, fet que ens fa destacar que ja l'any 1616 ja sabien la importància que tindrien la resolució algebraica d'aquests problemes. Aquesta obra conté molt més del que hem explicat en aquest treball, ja que també inclou una anàlisi del segon problema i resol diferents problemes. I és per això que considero que aquesta obra encara es pot estudiar amb més profunditat i detall.

El meu treball aporta un estudi de l'obra original i les resolucions dels problemes dels diversos autors, així com una comparació entre les seves resolucions. També faig un petit estudi de l'obra de Cyriacus, una obra que ha estat molt poc estudiada i de la que crec que se'n podria extreure moltes més conclusions sobre el procés d'àlgebrització si s'estudia les análisi que en fa del segon problema que va proposar Regiomontanus.

9. Bibliografia

- BOS, J.M Henk (2001) *“Redifining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early modern Concept of Contruction”*, Springer- Verlag,Nova York, 59-91 .
- BUSARD, Hubertus Lambertus Ludovicus (2005) *"Campanus of Novara and Euclid's Elements*", Franz Steiner Verlag.
- CONTI, Lino (1992) “ *La matematizzazione dell'universo”,* Edizioni Porziuncola.
- CYRIACUS, Clemens (1616) *“Problemata dúo nobilissima, quórum nec analysin geometricam, videntur tenuisse Ioannes Regiomontanus y Petrus Nonius; nec demonstrationem satis accuratam repraesentasse, Franciscus Vieta y Marinus Ghetaldus nunc demum Clemente Cyriaco diligentius elaborata y Novis analyseon formis exculta. Inscriptiones praeterea figurarum non injucundo”*.
- Euclides (1991), "*Los elemntos de Euclides V-IX”*, Traducción y notas de M. ª L. Puertas Castaños, Editorial Gredos .
- GUEVARA, Iolanda; MASSA ESTEVE, Mª Rosa (2005) "Métodes Algebraics a l'obra de Regiomontanus (1436-1476)*", Biaix,* 24, 27-34
- LEITÃO, Henrique (2006) *"Ars et ratio: Nàutica e a constituiçao da Ciência Moderna"* A: Vicente Maroto, Isabel i Esteban Piñeiro, Mariano (Coord). *La ciencia y el Mar*, Valladolid, Sever-Cuesta, 183-207.
- MANCOSU, Paolo (1996) "*Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*", Oxford University Press.
- MASSA ESTEVE, MªRosa (2005), " *Les equacions de segon grau al llarg de la història*", Biaix.
- MASSA ESTEVE, Mª Rosa(2006), "*L'àlgebrització de les matemàtiques. Pietro Mengoli (1625-1686)"*. Institud d'Estudis Catalans.
- MASSA ESTEVE, Mª Rosa(2010), *"*Àlgebra i Geometria al Libro de Algebra en Arithmetica y geometria (1567) de Pedro Núñez*". Quaderns d'Historia de l'Enginyeria*, vol XI, 101-123.
- NÚÑEZ, Pedro(1567) *"Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria*", Anvers,
- REGIOMONTANUS (1464, pub. 1533), *“De triangulis omnimodis”.* LLibre original i la traducció del llatí per Banabas Hughes (1967), The university of Wisconsin Press, Madison.
- VIÈTE, François (1600), "*APPENDICULA I De problematis quòrum geometricam construccionem se nescireait Regiomontanus"* de *apollonius gallus seu exsuscitata Apollonii Pergaei <periepafoon> geometria, Ad V.C. Adrianum Romanum Belgam”*, Paris.